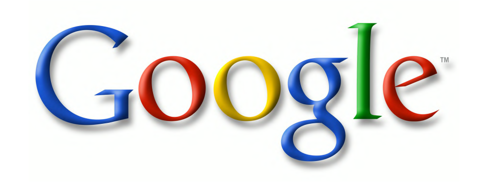
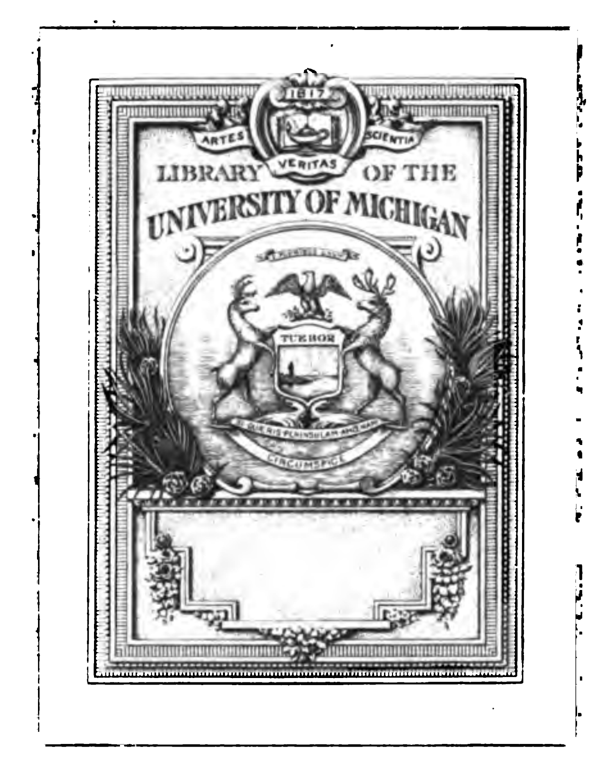
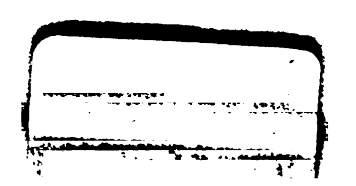



1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE,

OU

PRINCIPES DE PROJECTION POLAIRE

APPLIQUÉS

A LA DESCRIPTION DES CORPS.

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE,

OU

PRINCIPES DE PROJECTION POLAIRE

APPLIQUÉS

A LA DESCRIPTION DES CORPS;

PAR B.-E. COUSINERY,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

> Réunir l'avantage d'une représentation perspective à toutes les conditions d'une description géométrique.
>
> FOURIER, *Analyse des travaux de l'Académie royale*, année 1825.

A PARIS,

CHEZ CARILIAN-GOEURY, LIBRAIRE

DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 41.

1828

MU

Considérée géométriquement, la Perspective linéaire est une projection polaire à trois dimensions ; cette projection, qui fournit le moyen de ramener sur un seul plan les données et les opérations des problèmes qu'on peut se proposer dans l'espace, considérée jusqu'à ce jour comme une application de la méthode orthogonale, n'a été traitée directement par personne. Cependant, d'après ce qui a lieu en Géométrie plane, il était facile de prévoir, par analogie, que le système de projection polaire appliqué à l'espace pourrait, dans plusieurs circonstances, remplacer avec avantage la méthode orthogonale, et que l'étude de ce nouveau procédé descriptif ajouterait une branche importante à la théorie déjà si féconde des projections.

Nous allons essayer de remplir la lacune que nous venons de signaler, et, favorisés par la richesse du sujet que nous avons à traiter, il ne nous sera pas difficile de prouver que la projection polaire fournit, par elle-même, toutes les conditions nécessaires pour poser et résoudre les problèmes que l'on peut se proposer dans l'espace ; qu'elle marche de pair avec la méthode de projection orthogonale ; qu'il n'est aucune épure de ce dernier système qu'elle ne puisse reproduire, et, chose remarquable, que la plupart des nouvelles épures sont plus simples et plus générales que les anciennes.

Dans les applications, les deux méthodes offrent une différence qu'il est important de signaler. Les épures de perspective faisant nécessairement image, seront lues avec la plus grande facilité, souvent même par ceux qui n'auraient aucune idée de Géométrie (1) ; mais elles ne donneront pas immédiatement les grandeurs reélles des objets décrits (2) ; tandis que celles de Géométrie orthogonale, qui donneront presque toujours ces grandeurs, ne fourniront pas à beaucoup près des dessins aussi faciles à concevoir.

Il s'ensuit que la première de ces méthodes doit être employée de préférence dans tous les cas où il faut surtout parler aux yeux ; la seconde, quand il s'agit d'exécuter les objets qu'elle sert à décrire. L'une est connue sous le nom de *Géométrie descriptive*, l'autre prendra celui de *Géométrie perspective*.

Des démonstrations très élégantes de Géométrie plane ont été récemment ti-

---

(1) La perspective, quand il s'agit d'objets dont la forme nous est familière, est une écriture universelle que chacun sait lire sans avoir eu besoin d'en étudier les principes.

(2) On pourra néanmoins obtenir ces grandeurs par des opérations graphiques extrêmement simples.

rées des propriétés projectives polaires ; nous aurons occasion de prouver que les ressources que ces considérations peuvent fournir ne sont pas encore épuisées. Dans le nouveau système que nous allons développer, une seule figure plane exprimant des propriétés de l'espace, on sent que les vérités géométriques qui dérivent de cette dépendance, peuvent être démontrées d'une manière simple en remontant aux causes qui leur ont donné naissance ; de sorte qu'une démonstration se réduira souvent à remarquer que la figure plane dont on s'occupe, est l'épure polaire qui résout un problème connu à trois dimensions.

Une autre considération importante, c'est qu'une projection polaire étant vraie pour toutes les positions de l'œil, vraie, en ce sens qu'elle représente toujours un spectacle géométrique de même nature, dans lequel, les projections restant les mêmes, il n'y a de changé que les grandeurs angulaires et linéaires des objets représentés ; il suffit qu'une vérité indépendante de ces grandeurs soit démontrée dans une figure particulière, pour l'être dans toutes les transformations que cette figure peut subir par le changement de l'œil. Les modifications produites dans la perspective d'une même figure, par le changement du plan de projection, entraînent la même conséquence.

C'est ainsi qu'on démontre que certaines propriétés des parallèles ont lieu pour des droites concourant à un même point, quand on ne considère qu'un seul faisceau ; et, pour des droites concourant par groupes sur une même ligne, quand il s'agit de plusieurs faisceaux chacun de direction différente, mais tous parallèles à un même plan ; c'est ainsi que certaines propriétés du cercle, considéré comme cas particulier, ont lieu pour toutes les courbes du second degré ; propriétés qui s'étendent aussi aux surfaces du second ordre, et qui se démontrent par des considérations analogues.

Nous aurons soin dans le courant de cet ouvrage d'indiquer quelques-unes des applications à la Géométrie plane, auxquelles les épures que nous avons à traiter pourront donner lieu ; ces applications seront renvoyées à la fin de chaque chapitre, afin de ne pas interrompre le développement de la théorie.

Notre travail a été soumis à l'Académie des Sciences, qui l'a approuvé dans sa séance publique du 22 août 1825 (1) ; voici quelques passages du rapport des commissaires MM. Fresnel et Mathieu, rapporteur :

« Au moyen des extensions que M. C. apporte à la Perspective ordinaire,

---

(1) Des circonstances particulières ayant retardé la publication de ce Mémoire ; l'Auteur en apprenant qu'il venait de paraître, en 1827, un ouvrage sous le même titre (*Géométrie perspective*), par M. le colonel Dufour, de Genève, a dû craindre que son travail ne perdît l'avantage de la nouveauté, car en Mathématiques il n'est pas rare de se rencontrer quand on traite le même sujet. La lecture de l'Ouvrage de M. Dufour a dissipé ses appréhensions, et il s'estime heureux de pouvoir, sans compromettre ses droits, rendre un juste hommage à la manière élégante dont M. Dufour modifie les épures orthogonales pour en présenter la perspective, et aux heureuses applications que cet habile ingénieur en a faites à la recherche des ombres.

» les problèmes de Géométrie pure se résolvent par une seule projection qui a
» en outre l'avantage de présenter une image fidèle des objets..... Les construc-
» tions sont en général assez faciles à suivre, les épures qui sont exécutées avec
» soin ne paraissant pas plus chargées de lignes que celle de la projection
» orthogonale. Les moyens auxquels M. C. a recours, le conduisent par fois
» à des démonstrations simples de quelques propositions de Géométrie plane....
» Nous regrettons de ne pas trouver des applications dans lesquelles nous au-
» rions vu comment l'auteur parvient à se procurer les données indispensables
» à son système, savoir : les traces et les limites, soit pour les droites, soit
» pour les plans ; mais nous ne nous arrêterons pas aux difficultés que pourrait
» présenter, dans la pratique, la recherches des premières données qu'exige la
» *Géométrie perspective* ; nous la considérerons seulement comme une théorie
» mathématique, comme une manière nouvelle de traiter les questions de Géo-
» métrie descriptive pure, et, sous ce rapport, nous croyons pouvoir proposer
» à l'Académie d'accorder son approbation au travail ingénieux de M. C. »

Conformément au désir exprimé dans ce Rapport, à la suite de la théorie mathématique, qui a reçu elle-même de nombreux développemens, nous avons donné quelques exemples d'application, savoir : La perspective d'un cube placé d'une manière quelconque dans l'espace, celle d'une sphère, celle de la surface annulaire, et celle d'une vis à filets triangulaires, les dimensions de ces divers corps étant connues d'avance.

Nous avons ensuite supposé chacun de ces corps éclairé par des rayons lumineux de direction donnée, et déterminé les ombres qui en résultent. Ces exemples suffiront pour prouver que la projection polaire ne se borne pas à la solution des problèmes de Géométrie pure (1) : ils feront connaître la marche à suivre pour passer de la théorie aux applications.

En terminant, nous consacrerons quelques pages aux considérations polaires qui sont plus particulièrement à l'usage des dessinateurs ; et nous déduirons du nouveau système de projection quelques-unes des principales règles qu'un peintre doit suivre dans la composition linéaire de ses tableaux.

---

(1) Lorsque Monge conçut l'idée de simplifier les méthodes que les constructeurs de tout genre employaient avant lui pour obtenir les épures de projection orthogonale nécessaires à l'exécution de leurs divers travaux, il s'occupa d'abord à faire un corps de science du système de projection graphique qu'employaient ces ouvriers, et, pour y parvenir, il composa un ouvrage qui ne traite que des questions de Géométrie pure. Notre but a été, autant qu'il est permis de suivre les traces du maître, d'imiter ce qui avait été fait avec tant de succès pour la Géométrie orthogonale ; c'est en remontant à la projection polaire de la droite et du plan, et en traitant les mêmes questions de Géométrie, que nous nous sommes proposé de faire connaître aux dessinateurs un nouveau moyen de construire des perspectives exactes, par une série de principes et de démonstrations susceptibles de se graver pour toujours dans la mémoire, et qui puissent donner désormais aux constructions linéaires qui en dépendent, un enchaînement, une clarté, et surtout une généralité dont elles étaient presque entièrement dépourvues.

A une époque où les arts du dessin sont plus généralement cultivés que jamais; où les architectes ne se permettent plus d'élever un monument de quelque importance sans avoir étudié d'avance ses divers effets perspectifs; où les théâtres fondent une partie de leurs succès sur la beauté et l'exactitude de leurs décorations; où de vastes perspectives, représentant les lieux les plus célèbres du globe, sont livrées à la curiosité publique; et enfin, où les besoins de l'industrie exigent que des dessins faciles à exécuter et à concevoir rendent populaire le mécanisme des machines nouvelles; nous osons nous flatter qu'en nous efforçant de ramener à un seul corps de doctrine les principes de la projection polaire, et en cherchant à donner ainsi aux dessinateurs de tout genre les moyens de composer immédiatement des dessins qui réunissent l'*avantage d'une représentation perspective à toutes les conditions d'une description géométrique*, nous avons entrepris un travail susceptible de quelques applications utiles.

ERRATA.

Page 7,	ligne 21,	mêmes limites,	*lisez*	même limite
8,	26, 27,	leurs points limites,		leur point limite
9,	3,	en G,		en E
23,	2,	figure 22,		figure 20
29,	3,	à ces courbes tangentes,		à ces courbes, tangentes
31,	19,	courbes traces et limites,		courbe trace et limite
42,	27,	deux plans,		deux plans sécans
68,	7,	perpendiculaire *b*, *o*,		perpendiculaire *b*, O
69,	7,	S inous,		Si nous
84,	6,	R'U,		RU
85,	7,	E*s*,		F*s*

GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions.

La Géométrie perspective est un système de projection polaire dans lequel les corps sont rapportés à un plan connu de position, par des droites qui, partant de chaque point à projeter, viennent toutes aboutir à un même point fixe pris hors de ce plan.

Nous appellerons *Tableau* le plan de projection qui sera toujours supposé se confondre avec la feuille de papier sur laquelle on exécute les dessins;

Œil, le point de projection pris hors de ce plan;

Axe perspectif, la perpendiculaire abaissée par l'*œil* sur le *tableau*;

Point de vue, le pied de cette perpendiculaire;

Cône projetant, celui qui a son sommet à l'*œil* et le corps à projeter pour base : ce cône peut se réduire à un plan et à une ligne, que nous appellerons *Plan projetant* et *Ligne projetante*.

Enfin, nous appellerons indifféremment *Projection* ou *Perspective*, l'intersection du *cône projetant* avec le *tableau*.

Projection du point.

Projeter un point, c'est joindre ce point à l'œil par une droite; l'intersection du tableau et de cette droite est la perspective ou projection cherchée; mais comme cette projection est commune à tous les points de la ligne projetante, un point isolé sur le tableau est gé-

néralement la perspective d'une ligne passant par l'œil : une condition de plus devient donc nécessaire pour particulariser un des points de cette ligne; il faut indiquer, par exemple, qu'il se trouve sur une autre ligne, ou sur un plan, connus de position. La perspective du point dépendra donc de celles de la droite et du plan.

Projection d'une ligne.

En faisant passer un plan par l'œil et par une ligne donnée, l'intersection de ce plan avec le tableau est la perspective de cette ligne; la même considération qui vient de nous arrêter quand nous avons voulu déterminer un point, se présente encore ici; car la perspective d'une droite est commune à toutes les lignes qu'on peut tracer dans son plan projetant : c'est celle du plan projetant lui-même. Nous allons donner le moyen de modifier cette projection, de manière qu'elle ne représente plus qu'une seule des lignes contenues dans le plan projetant.

Soit (fig. 1) AB la ligne à projeter dont les points A et B sont censés à l'infini ; soit O l'œil, et EF la perspective de AB. Si nous menons par l'œil les deux parallèles OG et OH à AB et EF, nous verrons, à l'inspection de la figure, que la partie infinie DB se projette dans l'intervalle fini DG; que la partie finie DH se projette suivant la portion infinie DE, et enfin que la partie infinie HA se projette suivant la portion infinie GF, mais de telle sorte que les deux points extrêmes A et B de la ligne AB ont pour projection le même point G. Ce point remarquable, et qui est différent pour toutes les lignes non parallèles comprises dans le plan projetant, va nous servir à distinguer chacune d'elles; nous l'appellerons point *limite*. Si nous nous contentons d'opérer sur la partie de l'espace qui se trouve, par rapport à l'œil, derrière le tableau, ce point limitera en effet la perspective de la ligne AB. Dans cette supposition, la partie de la perspective que nous avons à considérer se trouvera comprise entre le point D et le point G, c'est-à-dire, entre le point où la droite elle-même rencontre le tableau, *sa trace*, et celui où vient aussi le rencontrer une parallèle à la droite menée par l'œil, *sa limite*. En marquant ces deux points sur la ligne indéfinie perspective de AB, toute indécision cesse : la limite fixe invariablement la direction de la droite projetée ; car elle détermine

une parallèle à cette droite, passant par l'œil, et la trace étant un des points de la droite elle-même, sa perspective ainsi modifiée ne peut plus appartenir qu'à une seule des droites comprises dans le plan projetant.

Le point limite s'appelle, dans les traités ordinaires de Perspective, *point de concours*, parce qu'il est commun à toutes les perspectives d'un même faisceau de droites parallèles entre elles ; la ligne qu'il faut mener par l'œil, pour déterminer leur point limite, étant en effet la même pour toutes les droites d'un même faisceau.

Le point de vue est le point *limite*, ou *point de concours* de toutes les droites perpendiculaires au tableau, puisqu'il est le point de rencontre de la perpendiculaire au tableau abaissée par l'œil.

Quand la droite à projeter est parallèle au tableau, sa trace et sa limite passent à l'infini ; il faut alors, pour que cette droite soit entièrement déterminée, se donner, outre son plan projetant, un autre plan quelconque qui la contienne aussi.

Quand la droite passe par l'œil, sa trace et sa limite se confondent, et sa perspective, comme nous l'avons déjà observé, se réduit à un point.

Si nous cherchons (fig. 1) quel est le point d'une droite quelconque AB, qui se projette en *g*, à égale distance de la trace et de la limite de cette droite, en menant la ligne projetante O*g* qui passe par ce point, on reconnaîtra, par l'égalité des triangles OG*g* et *bg*D, que ce point se trouve sur la droite, à une distance du tableau égale à celle qui existe entre le tableau et l'œil.

Projection du plan.

Une droite pouvant s'appliquer entièrement sur un plan, et la perspective d'une droite étant limitée, celle du plan doit l'être aussi. Le plan, comme la ligne, sera déterminé en projection polaire par *sa* ligne *trace* (son intersection avec le tableau), et *sa* ligne *limite*, c'est-à-dire le lieu des limites de toutes les droites par lesquelles on peut le supposer engendré. Il est évident que cette limite est droite, qu'elle est parallèle à la trace, et que c'est la trace d'un plan parallèle au proposé et passant par l'œil.

Il en est de la ligne limite d'un plan, comme du point limite d'une

droite; elle est commune à tous les plans parallèles, et, dans ce sens, elle peut aussi s'appeler *ligne de concours*.

De même que nous l'avons observé pour une droite, la *limite* et la *trace* d'un plan passant par l'œil se confondent; et un plan dont la limite passe par le *point de vue* est perpendiculaire au tableau, puisque, dans ce cas, le plan parallèle mené par l'œil contient l'*axe perspectif* qui est une droite perpendiculaire au tableau.

C'est entre la trace et la limite que vient se peindre sur le tableau tout ce qui se trouve sur la portion infinie du plan située, par rapport au tableau, du côté opposé à l'œil, seule partie de l'espace dont la perspective fasse réellement image; car entre l'œil et le tableau un corps cache lui-même sa perspective, et l'œil ne peut apercevoir ce qui est placé derrière lui.

L'horizon de la mer donne une idée suffisante de la limite d'un plan; cette idée serait parfaitement exacte sans la courbure du globe.

La perspective d'une droite et celle d'un plan étant déterminées, nous devons en déduire la solution des divers problèmes que l'on peut se proposer sur la position réciproque de ces deux élémens de tous les corps. Ces problèmes seront d'autant plus faciles à résoudre, qu'il y a une analogie parfaite dans les projections polaires de la droite et du plan, chose qui n'existe pas dans le système de projection orthogonale (1).

Notations conventionnelles des épures de projection polaire.

Le plan du papier sur lequel on opère étant censé celui du tableau, il faut faire connaître comment l'œil se trouve placé par rapport à ce plan. En choisissant pour *point de vue* un point quelconque du tableau, on indique que l'œil est sur une perpendiculaire élevée par ce point; en se donnant sur cette perpendiculaire la distance de l'œil au tableau, sa position sera déterminée. Pour rapporter cette distance sur le papier, on décrira, en la prenant pour rayon, une circonférence

(1) Le plan et la ligne sont représentés en perspective par leur trace et leur limite, tandis que dans la méthode orthogonale la droite est donnée par ses projections et le plan par ses traces.

dont le point de vue sera le centre. Cette circonférence sera utile toutes les fois qu'il faudra rabattre l'axe perspectif sur le tableau.

Nous verrons qu'il est une infinité de cas dans lesquels on peut exécuter des épures de perspective sans être obligé de tracer cette circonférence : ces épures expriment alors des propriétés géométriques entièrement indépendantes de la position de l'œil.

La figure 2 représente une épure de perspective : O en est le point de vue, et MNP la circonférence tracée avec la distance de l'œil au tableau pour rayon (1). La ligne AO est la perspective d'une droite perpendiculaire au tableau élevée au point A. La ligne CD est la perspective d'une droite quelconque, ayant D pour limite et C pour trace; le système des deux lignes parallèles EF, GH représente un plan passant par, ou contenant les droites CD et IK, puisque les traces et les limites de ces droites se confondent avec celles du plan. On remarquera que, pour distinguer la ligne trace de la ligne limite du plan, cette dernière a été ponctuée; et que, pour indiquer la trace et la limite de la ligne isolée AO, il a été formé un petit trait ponctué au point limite, et un trait plein au point trace. Quand une droite est contenue dans un plan, comme l'est CD, la chose n'est pas absolument nécessaire. Telles sont les notations graphiques que nous adopterons dans cet Ouvrage.

Nous aurons soin également, en indiquant un plan et une ligne, de faire toujours précéder les lettres qui désignent les limites par celles qui désignent les traces, et même de les séparer par une virgule. Ainsi, nous dirons la ligne A, O pour indiquer la ligne ayant sa trace en A et sa limite en O; cette ligne sera différente de la ligne O, A. Nous dirons de même le plan EF, GH : c'est celui qui a EF pour trace et GH pour limite; plan nécessairement différent du plan GH, EF. Ce système de notation sera également étendu aux surfaces qui ont, en perspective, des traces et des limites. Nous appellerons *invertir* une droite, un plan, une surface; passer à la droite, au plan et à la surface qui

---

(1) Dans toutes les épures suivantes, le cercle de rabattement de l'œil ne sera désigné par aucune lettre ; ce sera le seul tracé en ligne pleine. A partir de la figure 18, ce cercle, devenu inutile sera supprimé, et ne reparaîtra que dans les épures d'application.

s'expriment par les mêmes lettres, mais différemment placées : de la droite A, O, par exemple, à la droite O, A, etc.

Nous indiquerons plus tard les propriétés dont jouissent les lignes, les plans et les surfaces par rapport à leurs invertis.

Intersection de deux droites.

Pour que deux droites se rencontrent dans l'espace, il faut qu'elles soient contenues dans un même plan, ce qui aura lieu quand la ligne qui joint leurs tracés sera parallèle à la ligne qui joint leurs limites; ces deux parallèles sont les lignes projectives du plan commun aux deux droites.

Le point de rencontre de ces deux droites ayant pour projection le point de rencontre de leurs perspectives, ces perspectives peuvent se couper, 1° en avant de la trace du plan qui contient les deux droites; 2° sur cette trace; 3° entre la trace et la limite du même plan; 4° sur la limite; 5° en-delà de la limite; 6° enfin, à l'infini (quand les deux perspectives sont parallèles). Chacun de ces cas correspond à une position différente du point de rencontre dans l'espace : le 1er indique que le point se trouve entre le tableau et un plan parallèle au tableau mené par l'œil; le 2me, sur le tableau; le 3me, dans la partie de l'espace postérieure au tableau; le 4me, à l'infini (les proposées sont parallèles); le 5me, dans la partie de l'espace située derrière l'œil et limitée par un plan parallèle au tableau passant par l'œil; le 6me, enfin, sur ce plan parallèle.

Nous reviendrons souvent sur ces considérations, avec lesquelles il est essentiel de se familiariser, et qui nous serviront à reconnaître, dans chaque épure, le lieu de l'espace où se trouvent les diverses parties des lignes ou des surfaces représentées en perspective. Pour l'explication de ces divers cas du point de rencontre de deux droites, il faut se reporter à la figure 1re, au moyen de laquelle nous avons fait voir comment se projettent en perspective les parties finies et infinies d'une même ligne.

Quand on s'occupe de la projection polaire comme fournissant des dessins qui font image, on est conduit à considérer tout ce qui est en projection au-delà des limites comme une perspective imaginaire,

car l'œil ne peut apercevoir ce qui se trouve derrière lui; mais, sous le rapport projectif, tout est réel. Nous ferons souvent usage de constructions qui dépassent les limites ou les traces, parce que certains problèmes occupant toutes les parties de l'espace, leurs solutions seraient incomplètes si nous ne donnions que la partie de l'épure susceptible de perspective réelle.

PREMIER PROBLÈME.

Trouver la grandeur d'une droite parallèle au tableau.

Nous avons vu qu'une droite parallèle au tableau n'était déterminée que lorsque, outre sa perspective (la trace indéfinie de son plan projetant), on avait encore la trace et la limite d'un plan qui la contînt (1). Soit (fig. 2) la droite dont la perspective est RS, située dans le plan EF, GH, plan dont les lignes projectives sont nécessairement parallèles à la droite dans l'espace, et à sa perspective sur le tableau; et supposons que l'on demande la grandeur de la partie de cette droite comprise entre les points *a* et *b*.

Solution. Si, d'un point quelconque *n* de la limite du plan, on mène deux droites aux deux points *a* et *b*, prolongées jusqu'à la rencontre de la trace du plan, elles intercepteront sur cette trace une grandeur *ef* égale à *ab*, comme parallèle comprise entre parallèles; car les lignes *nf* et *ne* ayant mêmes limites, sont parallèles. Nous n'avons pas besoin de faire observer que la trace du plan étant sur le tableau, fournit immédiatement la grandeur cherchée.

On voit, à l'inspection de la figure, comment se résoudrait le pro-

(1) On ne doit point regarder le moyen que nous employons pour déterminer une parallèle au tableau comme une anomalie. Supposons, en effet, que, dans la figure 2, le trait plein et le trait ponctué qui déterminent la droite A, O, soient prolongés dans une direction parallèle; ils pourront alors être considérés comme la trace et la limite d'un plan passant par cette droite, et qui, combiné avec le plan projetant de cette même droite, la détermine dans l'espace; elle est, en effet, leur commune intersection.

On peut aussi employer un plan auxiliaire, pour déterminer une droite dont la trace et la limite ne se trouvent pas comprises dans le cadre sur lequel on opère.

blème inverse : *Porter sur une parallèle au tableau une grandeur donnée.*

2me PROBLÈME.

Trouver la grandeur d'une droite perpendiculaire au tableau.

Soit (fig. 3) la droite dont A, B est la perspective; et supposons que l'on demande quelle est la grandeur de la portion de cette droite projetée entre les points C et D.

Solution. En rabattant sur le tableau le plan projetant de la droite autour de sa trace AB, comme charnière, l'œil vient s'appliquer en O, et la droite se rabat suivant une perpendiculaire à la charnière en AH; joignant l'œil rabattu aux points C et D, les deux lignes prolongées détermineront sur la ligne rabattue une portion GK, qui est évidemment la grandeur cherchée. Réciproquement, si l'on voulait porter sur la perspective une grandeur donnée GK, à une distance AG du tableau, la construction inverse donnerait CD pour la perspective cherchée.

3me PROBLÈME.

Trouver la grandeur d'une droite quelconque.

Soit (fig. 4) la droite dont A, B est la perspective, et soit CD la portion de cette droite dont on demande la grandeur.

Solution. Faisons passer par la proposée un plan perpendiculaire au tableau; la limite de ce plan sera OB, qui joint le point de vue à la limite de A, B, puisque tout plan dont la limite passe par le point de vue est perpendiculaire au tableau. La trace de ce plan sera la droite AE parallèle à BO, et passant par la trace de la proposée. Il existe sur ce plan un système de parallèles qui divisent la droite A, B et la trace AE en parties égales, à partir du point A; ces parallèles ont leurs points limites sur la limite du plan qui les contient, et pour trouver ce point, il suffit de mener par l'œil, dans le plan BO, une droite qui fasse avec A,B et AF des angles égaux. Rabattant l'œil autour de OB, comme charnière, il s'applique en O'; O'B est, en rabattement, la parallèle à A, B passant par l'œil. Donc, si nous portons sur BO, de B en L, la grandeur O'B, le point L sera le point de concours cherché, puisque le triangle

O'BL est isocèle en B, et que BL est parallèle à AE dans l'espace, comme O'B l'est à A, B. Joignant ce point L aux points C et D, et prolongeant jusqu'à la rencontre de AF en G et F, nous aurons déterminé sur le plan AE, OB deux triangles ACE et ADF semblables au triangle LO'B, comme ayant leurs trois côtés parallèles; ces deux triangles sont donc isocèles en A; donc EF est sur le tableau la véritable grandeur de CD. Il existe sur la limite OB un autre point L' qui jouit de la même propriété que le point L; c'est celui que l'on aurait obtenu en portant la grandeur O'B du côté opposé à celui auquel elle a été portée. On peut faire usage indifféremment de ces deux points pour résoudre le problème dont nous nous occupons : on doit choisir celui des deux que les dispositions de l'épure rendent le plus commode.

Le 2me problème peut se résoudre par les considérations que nous venons d'employer dans celui-ci, sans avoir recours à un rabattement. En effet, considérons (fig. 2) AH, BO comme la trace et la limite d'un plan perpendiculaire au tableau passant par la droite A, B; le point O est la limite du système de parallèles qui, dans ce plan, forment la succession des triangles isocèles ACG et ADK, rectangles en A. Pour le démontrer, il n'y a qu'à supposer le point O joint à l'œil, et remarquer que le triangle qui a OB pour base et l'œil pour sommet, a les deux côtés de l'angle droit égaux, et que l'un de ces côtés est parallèle à la droite A, B comme perpendiculaire au tableau, et l'autre à la trace AH. Cette explication est entièrement indépendante de l'angle BAH formé par la trace du plan et la perspective de la ligne A, B, de sorte qu'un autre plan quelconque AH', BO' eût, par un raisonnement entièrement semblable, donné en G'K' la grandeur cherchée. On peut donc choisir celui de ces plans qui convient le mieux aux dispositions des épures qu'on a à exécuter.

4me PROBLÈME.

Par un point R (fig. 5) *donné sur une droite* A, B *mener une parallèle à une droite* T, K.

Solution. La ligne cherchée devant passer par le point R, et devant avoir même limite que T, K, comme parallèle à cette droite, sa di-

rection et sa limite sont connues; il ne reste donc plus qu'à trouver sa trace. Puisqu'elle coupe A, B, elle est dans un même plan avec cette ligne, et la limite de ce plan est la droite BK. La trace de ce plan devant passer par le point A et être parallèle à KB, le point M où elle rencontre KR prolongée, est le point trace cherché qui complète la perspective de la parallèle passant par le point donné.

5me PROBLÈME.

Trouver l'intersection de deux plans.

Solution. L'intersection des traces des deux plans CD, EF et GH, IK (fig. 5) donne le point A où la ligne cherchée perce le tableau, et l'intersection des deux limites donne le point B, limite de cette ligne; A,B est donc l'intersection des deux plans.

Puisqu'un plan est représenté en perspective par deux droites parallèles, l'une trace et l'autre limite, on peut imaginer un autre plan dont les lignes projectives se confondent avec celles du premier, de manière que la trace de l'un soit superposée à la limite de l'autre. C'est ce que nous avons désigné par le mot *invertir.* L'intersection commune de ces deux plans est parallèle au tableau, puisque les traces et les limites de deux plans invertis se rencontrent à l'infini : de plus, la perspective de cette intersection divise en deux parties égales l'espace compris entre les lignes projectives communes aux deux plans; car en coupant les deux plans invertis par un troisième plan quelconque, le point d'intersection de ces trois plans est donné par la rencontre des diagonales du parallélogramme que forment les lignes confondues des deux plans invertis, et la trace et la limite du troisième.

On peut invertir également les points projectifs d'une même ligne, et l'on obtient ainsi une seconde ligne qui coupe la première au point qui a pour perspective le milieu de la distance comprise entre leur trace et leur limite commune. En effet, en faisant passer par chacune des droites deux plans invertis, la commune intersection de ces plans coupe ces droites à leur point de rencontre, et nous venons de prouver que cette ligne divise en deux parties égales l'espace compris entre les traces et les limites des plans dont elle est l'intersection commune.

En se reportant à la construction de la figure 1re, par laquelle nous

avons fait remarquer que le point qui se projette en g, à égale distance de la trace et de la limite, se trouve derrière le tableau à une distance égale à celle du tableau à l'œil, nous reconnaîtrons que deux droites et deux plans invertis ont leur commune intersection sur un plan parallèle au tableau, et que ce plan est à une distance égale à celle de l'œil au point de vue.

Nous venons de voir que l'intersection commune de deux plans a pour perspective une des diagonales du parallélogramme que forment sur le tableau leur trace et leur limite. Si, sans rien changer à l'épure, on invertit un de ces plans, ce n'est plus la diagonale que nous venons de considérer, c'est l'autre diagonale qui, dans cette nouvelle supposition, est l'intersection commune.

On peut ainsi, en invertissant chacun des plans à son tour, faire passer l'intersection cherchée par tous les cas que présentent les diagonales, non-seulement en passant d'une diagonale à l'autre, mais aussi en invertissant chacune des droites représentées par ces diagonales; de sorte qu'un parallélogramme est la réunion de quatre épures, donnant chacune l'intersection de deux plans différens, mais tous assujettis à passer par un même point, intersection de deux quelconques des diagonales : c'est donc la perspective d'une pyramide quadrangulaire.

6me PROBLÈME.

Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan.

Soit M, K (fig. 5) la perspective de la droite, et CD, EF celle du plan donné.

Solution. Faisons passer par M, K un plan quelconque GH, IK; son intersection avec le plan donné est, d'après le problème précédent, la ligne A, B, qui vient couper M, K au point cherché R, puisque A, B est contenue dans le plan CD, EF.

7me PROBLÈME.

Mener par une droite un plan parallèle à une droite donnée.

Solution. Il suffit de mener par la trace de la première de ces droites une parallèle à la ligne qui joint les points limites des deux droites don-

nées : cette dernière est la limite du plan cherché, et sa parallèle en est la trace.

8me PROBLÈME.

Par un point donné sur une droite mener un plan parallèle à un plan donné.

Soit (fig. 6) le point A sur la droite B, C, par lequel il s'agit de mener un plan parallèle au plan MN, DE.

Solution. Par le point A nous mènerons une ligne quelconque, avec la seule condition que sa limite soit sur un des points de DE; la trace H de cette ligne s'obtiendra en observant que la nouvelle ligne est dans un même plan que B,C, puisque ces deux droites ont en A un point commun, et que la ligne qui joint les limites de ces droites doit être parallèle à celle qui joint leur trace. Menant par le point H une parallèle à DE, le plan KH, DE sera le plan cherché, puisqu'il contient une ligne qui passe par construction par le point A, et qu'il a même limite que le plan MN, DE. Nous observerons que, dans cette épure, la trace de ce dernier plan a été entièrement inutile, ce qu'on pouvait prévoir d'avance, puisque la trace d'un plan n'influe en rien sur sa direction.

9me PROBLÈME.

Trouver l'intersection d'un plan parallèle au tableau et d'une droite.

Un plan parallèle au tableau ne peut avoir ni trace ni limite, mais puisqu'un plan parallèle au tableau est connu de position, dans l'espace, par un seul de ses points, cette seule condition doit suffire également pour le déterminer en perspective, et pour permettre de résoudre tous les problèmes dans lesquels un plan parallèle au tableau entrerait comme but ou comme donnée.

Soit (fig. 7) le point O sur la ligne A,B, et supposons qu'on demande l'intersection du plan parallèle au tableau passant par ce point avec la ligne C, D.

Solution. Par la trace C de cette dernière ligne, si l'on mène une parallèle C, B à A, B, ces deux droites détermineront un plan qui sera évidemment coupé par le plan parallèle au tableau, suivant une droite OM parallèle au tableau et par conséquent à la trace CA du

plan qui la contient. Le point M appartient donc au plan qui passe par le point O; mais les droites C, B et C, D ayant leurs traces communes, sont aussi dans un même plan qui a pour limite DB, et qui, par les mêmes raisons que ci-dessus, est coupé par le plan du point O suivant une droite MN, parallèle à DB; donc le point N est le point cherché où un plan parallèle au tableau passant par le point O vient rencontrer la droite CD.

A l'inspection de la figure, on reconnaît que, sur chacune des lignes A, B, C, D et C, B, le point trace, le point limite, et le point de rencontre du plan parallèle, divisent chaque perspective en segmens proportionnels aux segmens de l'une quelconque des deux autres; propriété qui aurait lieu, quel que fût le nombre de lignes que nous eussions considérées. On en conclura que, lorsque deux points sont situés chacun sur deux droites quelconques, de telle sorte que, combinés symétriquement avec les traces et les limites de ces droites, ils divisent leurs perspectives en segmens proportionnels, ces points sont, dans l'espace, sur un plan parallèle au tableau.

10me PROBLÈME.

Par deux points donnés mener une droite.

Soient (fig. 8) les deux points A et B sur les deux lignes C, D et E, F.

Solution. Si par le point A nous menons une parallèle à la ligne E, F (4me problème), ces deux parallèles détermineront un plan qui contiendra les deux points donnés, et par conséquent la ligne cherchée. Or, ce plan a évidemment pour trace la ligne EM, qui joint les traces des lignes qui le déterminent, et, pour limite, FL, parallèle à EM; donc le point I, où AB prolongée vient rencontrer la trace du plan qui la contient, est le point trace de la ligne cherchée; et, par la même raison, L est son point limite.

11me PROBLÈME.

Par trois points donnés faire passer un plan.

Solution. Soient (fig. 8) les trois points A, B, P sur les droites C, D E, F et M', N, le problème précédent nous ayant déjà donné la droite I, L,

qui passe par les deux points A et B, il suffira de faire passer par cette droite et le point P un plan, pour que la question soit résolue. Par le point P, nous mènerons une parallèle à I, L, et nous obtiendrons sa trace T, en observant que cette droite est dans un même plan avec la droite M′, N. Faisant passer un plan par les deux parallèles I, L et T, L, ce plan IT, LS contiendra les trois points donnés. Cette épure se vérifie en cherchant les traces et les limites des droites qui joignent le point P aux points A et B, qui doivent être telles que ces droites se trouvent dans le plan IT, LS.

12me PROBLÈME.

Trouver l'intersection de trois plans.

Soient (fig. 9) les trois plans AB, CD, EF, GH et IL, MN dont on demande l'intersection.

Solution. Trois plans ne peuvent se couper qu'en un seul point où se rencontrent leurs trois lignes d'intersection commune. Il suffira donc de tracer dans cette figure deux quelconques de ces intersections; et leur point de rencontre donnera le point cherché O (1), par lequel vient nécessairement passer la troisième.

Invertissons chacun des plans proposés successivement, comme nous l'avons fait au 5me problème; nous ferons successivement parcourir aux diagonales tous les cas possibles, et nous trouverons ainsi sur l'épure quatre points satisfaisant chacun à une des suppositions que nous aurons faites.

13me PROBLÈME.

Quelles sont les relations qui doivent exister entre les projections d'une droite et d'un plan, pour qu'ils soient réciproquement perpendiculaires?

En se rappelant que la limite d'une droite est la trace d'une ligne parallèle passant par l'œil, et que la limite d'un plan est pareillement la trace d'un plan parallèle passant aussi par l'œil, la question pro-

---

(1) Ces trois plans se coupent dans leur partie imaginaire ; leur point de rencontre est donc derrière l'œil.

posée se réduit à celle-ci : *Quelles sont les relations qui doivent exister entre les projections d'un plan et d'une droite passant également par l'œil pour qu'ils soient réciproquement perpendiculaires.*

Solution. Soit MN (fig. 10) la ligne unique, représentant un plan passant par l'œil; menons à ce plan par l'axe perspectif un plan perpendiculaire, ce dernier contiendra la droite cherchée. Si nous le rabattons autour de sa trace AR, perpendiculaire à MN, l'œil qu'il contient viendra s'appliquer en C, et, par conséquent, la ligne AC, dont le point A n'a pas bougé, sera l'intersection rabattue du plan MN et du plan AR. La droite cherchée doit se trouver dans ce dernier plan, passer par l'œil, et être perpendiculaire à toutes les lignes menées par son pied dans le plan MN : AC est une de ces lignes. Donc CR passant par l'œil rabattu, et faisant un angle droit avec AC, sera, en rabattement, la ligne cherchée; et le point R, où elle vient percer la charnière, et par conséquent le tableau, sera sa perspective.

On peut conclure de là que, pour avoir la limite du faisceau de droites perpendiculaires à un plan donné, il faut, *par le point de vue, abaisser une perpendiculaire sur la limite du plan, rabattre l'œil autour de cette perpendiculaire comme charnière, et élever, par l'œil rabattu, une perpendiculaire à la ligne qui le joint à l'intersection de la charnière et de la limite du plan. Le point où cette perpendiculaire vient rencontrer la charnière est la limite cherchée.*

L'opération inverse donne la ligne limite des plans perpendiculaires à une droite donnée. Ce point et cette droite, ayant entre eux des relations réciproques, prendront, l'un par rapport à l'autre, l'épithète de *normal;* ainsi nous dirons que le point R est normal de la droite NM, et que la droite NM est normale du point R.

A chaque point du tableau correspond une droite normale; et à chaque droite, un point normal.

Le point normal se rapproche du point de vue à mesure que la droite normale s'en éloigne.

Quand l'un des deux arrive au point de vue, l'autre passe à l'infini.

Toutes les fois qu'un plan et une droite auront entre leurs limites les relations que nous venons d'exprimer, ils seront réciproquement

perpendiculaires, comme parallèles chacun à un plan et à une droite passant par l'œil, qui sont perpendiculaires entre eux.

Pour mener, par un point donné, une droite perpendiculaire à un plan, on cherchera le point normal de ce plan, et par le point donné on fera passer une ligne ayant ce point normal pour limite, ce qui revient au 4me problème. Pour mener par un point donné un plan perpendiculaire à une droite, il faut, de même, chercher la ligne normale du point limite de la droite; et par le point donné faire passer un plan qui ait cette normale pour limite, ce qui revient au 8me problème.

La figure 10 représente l'intersection de la ligne B,R avec le plan OP,MN, qui lui est perpendiculaire. Si l'on voulait avoir la grandeur d'une partie quelconque de cette perpendiculaire, on la trouverait par les procédés du 3me problème.

Il est à remarquer que tout plan dont la limite passerait par le point R serait perpendiculaire au plan OP,MN, ainsi qu'à ses parallèles, c'est-à-dire ayant même limite MN normale du point R. Si on donnait de plus à ce plan la condition de passer par une droite donnée, il serait entièrement déterminé, sa limite devant à la fois passer par le point R et par la limite de la droite donnée, et sa trace devant contenir la trace de cette même droite.

Angle d'une droite et d'un plan avec le tableau.

Le triangle ACR donne en A l'angle du plan MN avec le tableau, et en R celui de la droite R. Ces angles sont commums à tous les plans et à toutes les droites qui ont cette ligne et ce point pour limite.

14me PROBLÈME.

Trouver la plus courte distance entre deux droites.

Solution. Soient (fig. 11) A,B et C,D les deux droites données, la ligne DB est la limite d'un plan parallèle à chacune des deux droites. Nous venons de voir que tout plan dont la limite passerait par le point E, normal de BD, sera perpendiculaire au plan DB. Faisant donc passer par chacune des droites A, B et C, D un plan tel, que sa limite passe par E, l'intersection FE de ces deux plans sera perpendiculaire au

plan DB, elle rencontrera chacune des droites A, B et C, D, comme contenue dans un même plan; enfin, puisque ces droites sont parallèles au plan DB, elle sera perpendiculaire à chacune d'elles. PR est donc la plus courte distance cherchée. On pourra trouver sa grandeur par les procédés déjà donnés (3me problème).

15me PROBLÈME.

Un point étant donné sur un plan, trouver la position de ce point quand on rabat sur le tableau le plan qui le contient, par un mouvement de rotation autour de sa trace.

Solution. Soit (fig. 12) E le point donné sur le plan AB, CD; par ce point, menons dans ce plan une perpendiculaire à la trace AB : la limite de cette perpendiculaire est en F, point où une perpendiculaire abaissée du point de vue rencontre CD, le même où une perpendiculaire abaissée par l'œil viendrait rencontrer cette limite. La ligne EF, ainsi trouvée, vient percer le tableau au point G, et par conséquent se rabat dans le mouvement du plan suivant GS, perpendiculaire à AB. Il ne reste plus qu'à connaître la véritable grandeur de EG pour la porter de G en S. Portons de F en D une distance FI égale à celle de l'œil au point F, qui est rabattue en FI'; nous aurons ainsi déterminé dans le plan CD un triangle isocèle, rectangle en F, et dont l'un des sommets serait à l'œil. Joignant le point I au point E, et prolongeant jusqu'à R, nous aurons également sur le plan AB, CD un autre triangle EGR, rectangle en G, et semblable à celui que nous venons d'indiquer sur le plan CD, comme ayant ses trois côtés parallèles à ceux de ce dernier; EG est donc égal à GR, et GR étant sur le tableau, y est dans sa véritable grandeur. En la reportant sur GS, le point P sera le rabattement du point donné.

Si, au lieu de porter la grandeur FI' de F en D, nous l'eussions portée de F en C, le même raisonnement aurait fourni une solution semblable, donnant le même résultat. La figure présente les deux constructions.

Ayant le rabattement d'un point, celui d'une droite s'ensuit, soit en rabattant deux de ses points, soit en n'en rabattant qu'un seul, et remarquant que le point où elle rencontre la charnière ne varie pas.

On peut avoir besoin de rabattre un plan sur un plan parallèle au tableau : les mêmes principes que nous venons d'exposer servent pour cette opération ; il n'y a de changé que la charnière, qui est, dans ce cas, la trace du plan donné sur le plan parallèle au tableau. Les distances à cette trace s'obtiennent par les mêmes constructions que nous venons d'employer.

Au lieu de rabattre le plan du côté S, on eût pu le rabattre dans le sens opposé ; alors le point P se serait trouvé sur le prolongement de la perpendiculaire GS, mais de l'autre côté de la charnière, à la même distance GP. C'est au dessinateur à choisir le sens du rabattement qui convient le mieux au dessin qu'il exécute.

La construction inverse résout, par points, le problème suivant : *Un plan donné en perspective par sa trace et sa limite, étant supposé rabattu sur le tableau, et une figure quelconque étant tracée sur ce plan rabattu, trouver la perspective de cette figure lorsque le plan reprend sa première position.*

16me PROBLÈME.

Trouver l'angle de deux droites.

Solution. Ce problème, comme tous ceux où il ne s'agit que de grandeurs angulaires, peut se réduire à celui-ci : *Trouver l'angle que forment deux droites passant par l'œil.* Soient (fig. 13) les deux droites A,B et C,D dont on demande l'angle. D'après l'observation que nous venons de faire, le problème sera résolu en trouvant la véritable grandeur de l'angle O du triangle qui a DB pour base et l'œil pour sommet. Dans ce triangle, le côté DB est connu ; le côté qui joint l'œil au point B est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant OB pour base, et pour hauteur la distance de l'œil au tableau. Construisant cette grandeur, et faisant une opération semblable pour le troisième côté, nous pourrons construire le triangle DBR, dont l'angle R sera l'angle cherché. La même figure contient une autre solution, qui consiste à rabattre l'œil autour de BD comme charnière. On voit qu'elles se vérifient réciproquement, comme on devait s'y attendre.

17me PROBLÈME.

Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.

Solution. Soit A, B (fig 14) la droite, et OP, MN le plan donné : par A, B, faisons passer un plan perpendiculaire à OP, MN; la limite de ce plan devra passer par le point S, normal de la limite MN, et par le point B, limite de la droite; sa trace sera une parallèle à BS, menée par le point A. L'angle cherché est celui que forme la proposée avec la commune intersection HE, du plan OP, MN et du plan que nous venons de construire. En rabattant le plan EB, l'œil vient s'appliquer en R, et l'angle ERB est l'angle demandé.

18me PROBLÈME.

Trouver l'angle de deux plans passant par l'œil.

Solution. Soient (fig. 15) AD et DC les deux plans donnés : en menant par l'œil un plan perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans projetée en D, nous aurons formé un angle trièdre dans lequel l'angle plan de la nouvelle face mesurera l'angle demandé. La trace de ce plan est la ligne EF, normale du point D. Rabattant ce dernier plan autour de EF, l'œil vient s'appliquer en O', et l'angle EO'F est l'angle demandé; ce sera l'angle que formeraient entre eux deux plans quelconques, ayant l'un AD et l'autre CD pour limite.

Après avoir résolu en projection polaire les principales questions qui concernent la ligne droite et le plan, cherchons quelles sont celles de ces questions qui ont exigé que, dans le tracé de l'épure, on fît usage du cercle décrit du point de vue, avec la distance de l'œil au tableau pour rayon. Toutes les fois que, dans les données ou dans le but du problème, il a été question de grandeurs angulaires (1) ou linéaires déterminées, ce cercle a été indispensable pour exécuter l'épure; mais, toutes les fois que ces grandeurs ne sont point entrées comme données ou comme but du problème, ce cercle a été tout-à-fait

(1) Excepté les relations de parallélisme, qui sont indépendantes de la position de l'œil.

inutile. Quelque part qu'il eût été placé, les constructions auraient été les mêmes, c'est-à-dire que, dans ce cas, l'épure est vraie pour toutes les positions de l'œil dans l'espace; résultat extrêmement remarquable, et qui donne à la projection polaire un caractère de généralité que n'a point la projection orthogonale.

Quand, par exemple, nous plaçons sur le tableau la trace et la limite d'un plan, et la projection d'une droite qui le rencontre, chaque position différente de l'œil donne un plan et une droite différens dans l'espace, mais liés entre eux par la condition que leur point d'intersection a toujours sur le tableau la même perspective. Il en est de même de l'intersection de deux plans. Quelque part qu'un spectateur soit placé, cette épure sera toujours pour lui celle de l'intersection de deux plans, et cette intersection se projettera suivant la même droite sur le tableau. Nous reconnaîtrons plus tard que les surfaces du deuxième degré présentent des propriétés analogues.

Un point est la perspective d'une droite qui passe par l'œil. Placez en face de ce point autant de spectateurs que vous voudrez, ils supposeront tous que c'est vers eux que se dirige la droite, dont ce point est la projection.

Dans la suite, on verra comment les considérations qui se déduisent de la position indéterminée de l'œil peuvent servir à démontrer immédiatement certaines propriétés des courbes et des surfaces du second degré. Nous nous dispenserons désormais de tracer le cercle de rabattement dans toutes les épures où il ne sera pas indispensablement nécessaire.

PROPRIÉTÉS DE GÉOMÉTRIE PLANE, DÉDUITES DU Ier CHAPITRE.

1er *Lemme*. Deux droites qui se rencontrent peuvent être considérées comme la perspective de deux droites parallèles, dont le point d'intersection est la limite.

2me *Lemme*. Deux angles peuvent être considérés comme la perspective de deux couples de parallèles, situées sur un même plan dont la droite qui joint les sommets est la limite. Tout autre angle ayant son sommet sur cette limite, peut donc être aussi considéré comme un nouveau couple de parallèles contenues dans le même plan.

3me *Lemme*. L'ensemble de deux parallèles peut toujours être considéré comme

la perspective d'un plan, et une ligne isolée, comme celle d'un plan passant par l'œil.

On a souvent remarqué qu'un cercle pouvait être la perspective d'une courbe quelconque du second degré : la figure 16, au moyen des propriétés de la limite du plan, va nous en fournir une démonstration qui ne manque pas de simplicité et d'élégance.

Soit le cercle O tracé sur le tableau ; supposons que la courbe dont il est la projection polaire ait pour trace de son plan la ligne AB et pour limite la ligne CD : dans ce cas, la courbe dont ce cercle est la perspective est évidemment fermée, puisque nous pourrions assigner, en plaçant l'œil, la grandeur finie de toutes les cordes qu'on peut lui mener ; c'est par conséquent une ellipse. Si le plan de la courbe était AB, C″D″, cette courbe serait composée de deux parties séparées, l'une au-delà de la limite, et, par conséquent, située dans l'espace derrière l'œil, et l'autre située derrière le tableau, par rapport à l'œil. Ces deux parties ont chacune deux branches infinies représentées deux à deux par les points où la limite du plan coupe le cercle ; les tangentes au cercle à ces deux points sont la perspective des tangentes à l'infini aux quatre branches, et par conséquent la projection des asymptotes. Leur intersection en H sera la projection du centre de la courbe ; on reconnaît à ces propriétés une hyperbole. Enfin, si le plan de la courbe était AB, C′D′, tel que sa limite fût tangente au cercle, la courbe située sur ce plan aura deux branches infinies, dont les tangentes sont parallèles à la ligne qui joint l'œil au point où la limite du plan touche le cercle ; ces tangentes sont elles-mêmes à l'infini. Toutes les cordes qui passent par ce point coupent la courbe à l'infini, et sont parallèles entre elles ; cette courbe est donc une parabole.

De cette figure, il est aisé de conclure que les propriétés du cercle, qui n'entraînent point des considérations de grandeurs déterminées angulaires ou linéaires, appartiennent à toutes les courbes du second degré ; car, dans la fig. 16, puisqu'on peut faire varier à volonté l'œil et le plan sécant, on peut toujours les disposer de manière à produire dans l'espace une courbe déterminée, dont le cercle serait la projection, et telle, que les sécantes et tangentes du cercle seraient la perspective de tangentes et sécantes analogues, et semblablement placées dans cette courbe.

Supposons encore que, par un point de la limite du plan de la courbe projetée suivant ce cercle, nous avons mené deux tangentes à ce cercle ; ces tangentes seront les perspectives de deux tangentes parallèles sur la courbe (1er lemme); la corde qui joint, dans le cercle, les deux points de tangence sera donc la perspective d'un diamètre de la courbe ; cette corde contiendra donc la perspective du centre ; toutes les cordes ainsi déterminées devront donc passer par un même point, qui est la perspective du centre de la courbe que l'on considère.

En Géométrie plane, ce point est appelé *pôle* de la ligne d'où proviennent

toutes les tangentes, qui est elle-même appelée *polaire* par rapport à ce point. Ces relations ont, en Perspective, une signification déterminée. Chercher le pôle d'une ligne, c'est construire l'épure qui résout ce problème : *La base d'un cône ayant son sommet à l'œil étant donnée, trouver la perspective des centres de toutes les courbes produites sur ce cône par l'intersection d'une suite de plans parallèles dont on a la limite.* Nous verrons plus tard que les relations du pôle et de la polaire tiennent encore à d'autres propriétés des surfaces du second ordre.

Si les sections sont des ellipses, le pôle est intérieur au cercle; si ce sont des paraboles, le pôle est sur le cercle même au point de tangence de la limite du plan, c'est-à-dire à l'infini; enfin, si ce sont des hyperboles, le pôle est extérieur au cercle.

En appliquant la seconde solution du 2me problème à la question suivante : Chercher (fig. 3) sur la perspective de A, B le point qui se trouve à une distance du tableau égale à AG (1), on est conduit à cette proposition de Géométrie plane : Deux cercles étant donnés, si, dans chacun de ces cercles, on mène un rayon, quelle que soit la direction de ces rayons, pourvu qu'ils soient parallèles entre eux, les lignes qui joignent leurs extrémités viennent passer par un même point situé sur la ligne qui joint les centres des deux cercles. Quand nous nous occuperons du cône, nous reconnaîtrons aux deux points qu'on peut ainsi déterminer la propriété d'appartenir aux tangentes communes aux deux cercles.

L'épure de l'intersection d'une droite et d'un plan démontre immediatement la proposition suivante : Si l'on a sur un plan deux parallèles invariables et deux points fixes, et que, par ces deux points, on fasse passer deux autres parallèles variables de direction, dans la succession des parallélogrammes formés, les diagonales viennent toutes passer par un même point situé sur la droite qui joint les deux points fixes; et, comme il y a dans la suite des parallélogrammes deux systèmes de diagonales, le second système vient concourir à un second point sur la même droite.

Par le 2me lemme, mis en tête de ces notes, on reconnaîtra que la même propriété existe en remplaçant les parallèles par des angles, pourvu que l'angle variable soit assujetti à se mouvoir de manière que son sommet parcoure une même ligne droite passant aussi par le sommet de l'angle fixe.

On a donné depuis long-temps le moyen de mener par un point une parallèle à une droite donnée, en n'employant que la règle à la solution de ce problème,

---

(1) Ce problème a deux solutions. Il existe pareillement en avant de la trace de A, B un autre point sur cette droite, à une même distance AG du tableau.

pourvu que l'on eût, *à priori*, un parallélogramme tracé sur le plan où l'on doit opérer. Cette solution est une épure de perspective. Soit en effet (fig. 20) la droite AB, à laquelle on doit mener la parallèle, et CDEF le parallélogramme donné : en considérant ce parallélogramme comme la perspective de deux plans CD, EF et CE, DF (3me lemme), et la ligne AB comme la trace d'un troisième plan passant par un point quelconque O de la commune intersection C, F des deux premiers, le problème sera résolu ; car, en joignant le point O au point I, on a la direction de l'intersection commune du plan CE, DF avec le plan cherché, et par conséquent en H la limite de cette intersection ; opérant de même pour l'autre plan, nous aurons en G la limite de l'intersection avec le plan CD, EF. La ligne qui joint G à H est donc la limite du plan cherché ; elle est donc parallèle à AB. Ayant deux parallèles, on sait comment leur en mener une troisième par un point donné en n'employant que la règle, et c'est encore la perspective qui fournit cette solution.

Si le point O, au lieu d'être pris arbitrairement, était, comme nous l'avons fait, celui où viennent se couper les deux diagonales du parallélogramme, le raisonnement ci-dessus, appliqué au plan CD, EF et au plan CE, DF inverti, qui ont pour intersection la diagonale DE, prouverait que la droite LH est parallèle à la droite IG ; enfin, on démontrerait de même que I'L' est parallèle à G'H'.

Par le 2me lemme, on peut conclure de la figure 22, une figure analogue, dans laquelle tous les systèmes de parallèles seraient remplacés par des lignes concourant deux à deux sur une même droite, et par conséquent démontrer les propriétés connues du quadrilatère par rapport à la droite qui joint les points de rencontre de ses côtés opposés.

Nous avons dit que la perspective donnait un moyen de mener, avec la règle, une parallèle à deux autres droites, ou, d'après le 1er lemme, une droite au point de rencontre de deux autres. Soient (fig. 17) les deux droites AB et CD dont on suppose qu'on ne peut obtenir le point de rencontre sur le papier ; nous les regarderons comme la perspective de deux lignes situées dans un plan qui a pour trace MC, et qui a pour intersection la ligne MK avec un autre plan dont nous ne considérerons pareillement que la trace MN que l'on peut se donner à volonté, et nous supposerons que ce dernier plan contient le point O, par lequel il s'agit de mener une droite au point de concours de AB et CD. Faisant passer par le point O et chacune de ces deux droites un plan, les lignes BOG et DOF seront chacune dans un de ces plans. Les points G et F sont donc un point de leur trace, les points A et C en sont deux autres ; donc le point H est la trace de leur commune intersection. Cette commune intersection passe par le point O, par construction ; elle rencontre de plus chacune des lignes AB et CD, comme troisième arète d'un angle trièdre formé par les plans dont AH, HC et MC sont les traces ; donc la ligne qui joint le point H au point O est la ligne cherchée.

Nous n'avons traité cette question en supposant le point O hors du plan des

deux droites, que pour donner la démonstration de la construction employée : ramenée à un plan, la solution se compose des mêmes lignes ; mais la démonstration ne serait pas, à beaucoup près, aussi simple si l'on ne considérait pas la figure comme résolvant un problème à trois dimensions (1).

Par les considérations qui résultent de l'épure de l'intersection de trois plans et par le 2me lemme, on démontre que si, sur un plan, trois angles rectilignes sont disposés de manière à avoir leurs sommets sur une même droite, les six diagonales des trois quadrilatères qu'ils forment deux à deux viennent toutes se couper trois à trois en quatre points ; chaque diagonale contient deux de ces points.

L'épure de l'angle de deux plans peut servir à démontrer cette proposition de Géométrie : Dans tout triangle, les perpendiculaires abaissées du sommet d'un angle sur le côté opposé passent par un même point. Supposons, en effet, que l'angle des deux plans donnés (fig. 15) soit droit. Alors dans l'angle trièdre formé à l'œil chaque arête est perpendiculaire à la face opposée, et l'on a vu que pour qu'une droite et un plan fussent réciproquement perpendiculaires, il fallait que la ligne qui joint le point limite de la droite au point de vue fût perpendiculaire à la trace du plan. Le point de vue est donc, dans ce cas, commun aux trois perpendiculaires. Il n'est pas besoin de faire observer que tout triangle, quand il n'a pas d'angle obtus, peut être considéré comme la trace d'un angle trièdre droit, au sommet duquel on peut supposer l'œil placé. Dans le cas de l'angle obtus, en considérant le triangle formé par le grand côté, et les perpendiculaires abaissées de ses extrémités sur les deux autres côtés prolongés, triangle dont les trois angles sont aigus et dont les perpendiculaires ont pour point de rencontre le sommet de l'angle obtus du premier, on reconnaît que la propriété énoncée ci-dessus ne peut avoir lieu pour l'un de ces triangles, qu'elle n'ait aussi lieu pour l'autre.

---

(1) On éprouve souvent des difficultés pour résoudre certains problèmes de Géométrie plane, par les seules ressources que présente cette Géométrie, qui n'est qu'une partie de la *Science de l'étendue* ; tandis que, si l'on considère la question à résoudre comme dépendant d'un problème à trois dimensions, la solution cherchée s'obtient presque sans effort. Rien ne favorise plus ce passage d'une figure plane à une épure, que les considérations de projection polaire. On trouvera à la fin du chapitre suivant de nouvelles preuves à l'appui de cette asserrtion.

CHAPITRE II.

De la représentation perspective des surfaces.

Lorsqu'un corps est mis en perspective, la réunion des points qui composent son image occupe un certain espace sur le tableau; cet espace est limité par des lignes courbes ou droites : l'ensemble de ces lignes, quels que soient leur nombre et leur nature, est la perspective du contour apparent de ce corps; c'est la trace d'un cône ayant son sommet à l'œil, engendré par un plan qui tournerait autour du corps sans cesser de lui être tangent. La ligne de tangence, qui peut être continue ou brisée, et qui peut avoir plusieurs branches, reçoit le nom de contour apparent, parce qu'elle sépare la partie vue du corps de celle qui ne l'est pas. Par cette seule propriété, on voit que, dans un système dont les épures sont destinées à faire image, le contour apparent est un élément indispensable de description.

Ce que nous venons de dire d'un corps s'applique également aux surfaces ; mais un même contour apparent pouvant appartenir à une infinité de surfaces, ne peut suffire à leur description.

En traitant des surfaces du second ordre, nous allons indiquer les moyens que l'on peut employer pour compléter la description de chacune d'elles; moyens que l'on pourra successivement étendre à d'autres surfaces, en les modifiant suivant leurs propriétés et leur génération particulières.

Des surfaces du second ordre.

Les surfaces du second ordre se divisent en deux classes : la première comprend celles qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une droite, et que nous appellerons, pour ce motif, *réglées;* la seconde est composée de celles qui ne jouissent pas de cette propriété, et que nous appellerons *non réglées*, par opposition aux premières.

Les surfaces réglées auront nécessairement une courbe trace et une courbe limite; chacune de ces courbes comprendra, l'une le lieu des

traces, et l'autre, le lieu des limites de toutes les droites génératrices de la surface que l'on considère. La perspective du contour apparent de ces surfaces sera la courbe enveloppe, déterminée par la projection successive des génératrices. Nous verrons que ces trois courbes, la trace, la limite et le contour apparent, sont plus que suffisantes pour déterminer entièrement une de ces surfaces. Quand ces trois courbes seront données, pour trouver une génératrice de la surface à laquelle elles appartiennent, il suffira de mener une tangente à la courbe contour apparent, et la trace et la limite de cette génératrice seront données par la rencontre de cette tangente avec les courbes traces et limites. Puisqu'on peut, ayant les trois courbes projectives d'une surface réglée, trouver autant de génératrices qu'on désire, rien ne reste indéterminé, que les grandeurs qui dépendent de la position de l'œil. Nous remarquerons que la limite, pouvant être considérée comme l'intersection de la surface par un plan parallèle au tableau, situé à l'infini, est nécessairement une courbe semblable à la trace, et semblablement placée.

Les surfaces non réglées, du second ordre, ne sont pas aussi simples à représenter, ou du moins ne peuvent pas l'être par les mêmes données; car l'ellipsoïde ne peut, en aucun cas, avoir de limite : il faudra donc, pour décrire cette classe de surfaces, employer d'autres considérations. Ces surfaces ont toutes un centre, qui se trouve sur la ligne qui joint l'œil au centre de leur contour apparent; point dont la perspective se confond par conséquent avec celle du centre de la surface. Il suit de là que la perspective de toute droite passant par le centre de la surface, passe par le centre du contour apparent.

En se donnant, à volonté, une ligne passant par le centre de la surface, ce centre sera connu, et par conséquent la surface sera déterminée. Ce sera une ellipsoïde quand le centre sera, par rapport à l'œil, à une distance finie dans la partie de l'espace postérieure au plan du contour apparent; un paraboloïde elliptique, lorsque ce centre sera à l'infini (sur la limite de la droite qui sert à le déterminer); enfin, un hyperboloïde à deux nappes, lorsqu'il sera dans la partie de l'espace antérieure au plan du contour apparent (a).

Pour plus de simplicité, quand il s'agira des surfaces non réglées,

(a) Toutes ces suppositions se rapportent à un contour apparent elliptique.

nous prendrons, pour plan du tableau, celui du contour apparent lui-même, et pour la ligne qui doit déterminer le centre, une droite ayant sa trace sur cette courbe. En supposant que cette ligne se meut sans quitter le centre et la courbe, elle décrira un cône diamétral.

Si, au lieu d'être supposé sur le plan du tableau, le contour apparent était donné sur un plan connu de position, la perspective du centre de la surface serait alors, au pôle de la projection du contour apparent, la limite de son plan prise comme polaire.

SURFACES RÉGLÉES DU SECOND ORDRE.

Du cylindre.

Le cylindre, étant une surface réglée, sera déterminé par sa trace, sa limite et son contour apparent. Sa trace sera une courbe quelconque du second degré; sa limite, un point, puisque toutes ses génératrices sont parallèles; et son contour apparent, la trace des deux plans tangens qu'on peut lui mener par l'œil, c'est-à-dire les deux tangentes qu'on peut mener par son point limite à sa courbe trace. La limite et la trace d'un cylindre suffisent donc à sa détermination.

Quand on se donne un point en perspective, sur un cylindre, tel que le point A sur le cylindre PMN,O (fig. 18), ce point peut appartenir à deux génératrices, l'une vue, et l'autre cachée, et par conséquent il correspond à deux points sur la surface. On a la perspective des deux génératrices, en joignant le point donné à la limite O du cylindre. Les traces de ces deux génératrices, qui ont même limite et même plan projetant, sont données par la rencontre de AO avec la courbe trace du cylindre.

Pour qu'un plan soit tangent à un cylindre suivant une génératrice, il faut que sa limite passe par celle de la surface, et que sa trace soit tangente à la trace du cylindre, au point où là génératrice de contact vient couper cette trace. Le plan BC,LO est tangent au cylindre suivant la génératrice B, O.

La trace et la limite des deux plans tangens, passant par l'œil, se confondent, et donnent pour contour apparent les génératrices uniques E,O et F,O, qui séparent la partie vue de la partie cachée du

cylindre. Tout autre plan passant par l'œil coupant le cylindre, et passant par sa limite, donnerait deux génératrices, l'une vue, et l'autre cachée.

Si, par un point extérieur au cylindre, on veut lui mener un plan tangent, il suffira de mener par ce point une parallèle aux génératrices, et, par la trace de cette parallèle, de mener deux tangentes à la trace du cylindre : ce seront les traces des deux plans cherchés ; et, comme on connaît de plus un point de leurs limites, ces plans sont entièrement déterminés. Chacun des points de tangence de leurs traces détermine une des génératrices de contact.

Nous avons donné (fig. 18) l'épure de l'intersection du cylindre PMN, O et du plan CD, RS : une suite de plans parallèles au cylindre, et ayant LO pour limite, coupent chacun cette surface suivant deux génératrices, et rencontrent le plan sécant suivant une ligne dont l'intersection avec les deux génératrices donne deux points de la courbe. La tangente CS à cette courbe est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent au cylindre suivant la génératrice B,O, qui contient le point de tangence.

A mesure que l'œil changera de place devant cette épure, elle représentera l'intersection d'un plan et d'un cylindre différens ; mais le plan de toutes les courbes d'intersection sera toujours assujetti à avoir pour trace sur le tableau la ligne CD. Cette ligne est appelée, en Géométrie plane, *sécante imaginaire de la courbe et du cercle trace du cylindre.*

Du cône.

Un cône étant une surface réglée du deuxième ordre, sera déterminé par sa trace, sa limite et son contour apparent.

Sa trace, comme celle du cylindre, est une courbe quelconque du second degré ; sa limite, étant le lieu des limites de ses génératrices, est évidemment la trace d'un cône semblable ayant son sommet à l'œil ; ces deux courbes seront, comme nous l'avons déjà observé, semblables et semblablement placées ; son contour apparent sera l'ensemble des deux droites, tangentes à la fois à sa courbe trace et à sa courbe limite ; car il est évident qu'un plan tangent au cône, et passant par l'œil, est tangent au cône parallèle qui a l'œil pour sommet. Il suit de là

qu'un cône est représenté en perspective par deux courbes semblables et semblablement placées, l'une trace et l'autre limite, et par le système des deux tangentes communes à ces courbes tangentes, qui forment à elles deux le contour apparent de la surface, donnent son sommet par leur commune intersection, et séparent la partie de la surface qui est vue de celle qui est cachée.

Quand les tangentes contour apparent ont leur point de rencontre entre les deux courbes trace et limite, le sommet est en perspective réelle, il est en perspective imaginaire quand ces mêmes tangentes se coupent extérieurement. Quand les deux courbes se touchent extérieurement, l'œil est sur la surface qui a son sommet en perspective réelle.

Un cône est suffisamment déterminé quand on a son sommet, sa trace et un point de sa limite, ou sa limite, son sommet et un point de sa trace; puisque nous avons fait remarquer que ces deux courbes sont semblables et semblablement placées, et que la droite qui joint leur centre passe par le sommet : il est également déterminé quand on a sa trace et sa limite; car la perspective du sommet, étant le point d'où l'on peut mener deux tangentes communes à ces deux courbes, on sait qu'il n'y a que deux points qui jouissent de cette propriété.

En se donnant la projection d'un point A, sur la surface d'un cône PMN,P'M'N' (fig. 19), ce point correspondra généralement à deux génératrices, intersection de la surface par un plan passant par le sommet et la ligne projetante du point donné. On obtiendra la perspective de ces génératrices, qui ont même plan projetant, en joignant le point donné au sommet O, et prolongeant la ligne ainsi obtenue jusqu'à la rencontre de la trace et de la limite de la surface; elle coupera ces deux courbes en quatre points, dont deux traces et deux limites, qui déterminent les génératrices cherchées (1).

---

(1) Ces quatre points différemment combinés donnent encore deux autres droites, qui ne passent pas par le sommet, et qui, par conséquent, n'appartiennent point au cône; elles dépendent d'une surface conoïde qui aurait pour base sur le tableau la base même du cône qui aurait même limite, et dont les génératrices s'appuieraient sur la droite qui joint le sommet du cône à l'œil. La perspective du contour apparent de ce conoïde se confond avec celle du contour apparent du cône.

Un plan tangent au cône suivant une génératrice passe toujours par le sommet; sa trace est tangente à la trace du cône, et sa limite l'est également à la limite de cette surface, à chacun des points où ces courbes sont rencontrées par la génératrice de contact. Le plan RV,BS est tangent au cône suivant la génératrice R,B.

Si, par un point extérieur, on demandait de mener un plan tangent au cône, on chercherait la droite qui joint ce point au sommet; par la trace de cette droite, on mènerait deux tangentes à la courbe trace du cône, et ces tangentes seraient les traces des deux plans cherchés. Pour trouver leurs limites, il n'y aurait qu'à mener à la courbe limite du cône deux tangentes parallèles à chacune de ces traces; ces limites doivent venir passer par la limite de la droite qui joint le point donné au sommet du cône, cette droite étant, par construction, l'intersection commune des deux plans tangens cherchés.

Quand un cône est coupé par un plan, il peut arriver trois cas : ou la ligne limite du plan coupe la courbe limite du cône, ou elle lui est tangente, ou elle lui est extérieure. Dans le premier cas, le cône a deux génératrices parallèles au plan coupant; elles ont leurs limites aux points d'intersection de la limite du plan et de celle du cône: l'intersection cherchée est alors une hyperbole. Dans le second, il n'y a qu'une seule génératrice qui soit parallèle au plan coupant, celle qui a sa limite au point de tangence : l'intersection est une parabole. Dans le troisième, enfin, le plan rencontre toutes les génératrices, et la courbe est une ellipse. Quand, dans les deux premières suppositions, le plan passe en outre par le sommet, l'hyperbole se réduit à deux droites, et la parabole à une seule, suivant laquelle le plan est tangent au cône, et, comme nous l'avons déjà vu, dans ce cas, la trace du plan est aussi tangente à la trace de la surface.

La figure 19 donne l'épure de l'intersection du cône PMN,P'M'N' avec le plan VI,TL, dont la limite est sécante de celle du cône. Nous avons fait passer une suite de plans par la ligne qui joint le centre de la base au centre de la limite, ligne qui passe par le sommet. Ces plans ont donné chacun deux génératrices dans la surface, et une ligne sur le plan coupant. La rencontre de ces trois lignes a fourni, pour chaque plan, deux points de la courbe : l'épure ne donne qu'un seul de ces plans coupans, savoir, celui qui passe par la génératrice R,B; nous

avons mené la tangente à la courbe de section, par la même considération que nous avons employée dans l'épure analogue du cylindre. La tangente VA au point A est la commune intersection du plan sécant VI,TL et du plan tangent VR,BS suivant la génératrice R,B.

De l'hyperboloïde à une nappe.

L'hyperboloïde étant une surface réglée du second degré, sera déterminé par sa trace, sa limite et son contour apparent. Les relations qui lient ces courbes ne permettent pas de les choisir toutes trois à volonté. Ainsi, ayant la limite et la trace, si l'on se donne encore une génératrice, c'est-à-dire une tangente au contour apparent qui rencontre la trace et la limite, la surface est déterminée; car, en faisant passer par cette génératrice une succession de plans quelconques, ces plans, par leur intersection avec la trace et la limite de la surface, donnent chacun une génératrice nouvelle; et, quand on aura ainsi cinq de ces génératrices, la surface sera entièrement déterminée, puisque le contour apparent s'ensuivra.

Trois droites déterminant un hyperboloïde, il en résulte que, connaissant trois tangentes au contour apparent, et les trois points de chacune des courbes traces et limites que contiennent ces tangentes, on peut également tracer ces trois courbes projectives.

Sans indiquer d'autres dépendances, qui se réduisent toutes aux neuf conditions nécessaires pour particulariser une surface du second ordre, nous allons décrire l'hyperboloïde par les deux moyens de description que nous venons d'indiquer.

19me PROBLÈME.

La courbe trace, la courbe limite et une génératrice de l'hyperboloïde étant données, décrire cette surface.

Soient (fig. 21) PNM,P'N'M' la trace et la limite données, et soit A,B la génératrice connue; menons, par cette droite, un plan AC,BD tel, que sa limite soit tangente à la limite de la surface. Dès lors ce plan qui touche la surface à l'infini contient deux génératrices parallèles, et par conséquent passe par le sommet du cône asymptote auquel il est tangent. Le sommet de ce cône est le centre de l'hyperboloïde, et

les deux surfaces ont même limite, comme composées de génératrices parallèles. La trace du cône asymptote doit être tangente à la trace du plan AC,BD, et être une courbe semblable et concentrique à PMN. Ce cône ainsi décrit, tout nouveau plan tangent qu'on lui mènera déterminera, par son intersection avec la trace et la limite de l'hyperboloïde, deux génératrices parallèles, chacune d'un système de génération différent; et puisque nous pourrions construire, par ce moyen, un nombre quelconque de génératrices, il s'ensuit que nous obtiendrons sans peine la troisième courbe qui doit déterminer entièrement la surface.

La discussion de l'intersection d'un plan et d'un hyperboloïde se ramène à celle de l'intersection d'un cône et d'un plan; car, en considérant la section du cône asymptote par le plan donné, il est facile d'en conclure la section de la surface, qui est toujours une courbe de même nature que celle obtenue sur le cône. Dans le cas où le plan sécant est tangent au cône asymptote, l'hyperboloïde est coupé suivant deux droites parallèles à la génératrice de contact sur le cône, et cette dernière divise en deux parties égales l'espace compris entre les deux autres.

La figure 21 contient l'épure de l'intersection de la surface ainsi déterminée avec le plan FG,IH. Cette intersection est le lieu des points de rencontre des génératrices avec le plan sécant. Si l'on y traçait aussi l'intersection du même plan avec le cône asymptote, les deux courbes, devant avoir même centre, leurs perspectives auront même pôle par rapport à la limite du plan sécant; donc, si, par le procédé connu, on mène une tangente à un des points de la courbe intersection du plan et du cône, et qu'on joigne le point de tangence au pôle commun des deux courbes, la ligne prolongée déterminera sur l'autre courbe un point, dont la tangente ira rencontrer la première sur la limite du plan sécant; et cette propriété suffira pour la construire.

20me PROBLÈME.

Trois droites étant données, trouver la trace, la limite et le contour apparent de l'hyperboloïde qu'elles déterminent.

Solution. Pour résoudre ce problème, il suffira de construire cinq génératrices, puisque l'ensemble de ces cinq génératrices fournira cinq

points de chacune des deux courbes trace et limite de la surface, et cinq tangentes au contour apparent.

Soient donc (fig. 22) A, B la 1re droite, C, D la 2me, E, F la 3me; par la 2me et la 3me, faisons passer deux plans parallèles à la 1re; les traces de ces deux plans sont HC et EK. Par la 1re, faisons passer un plan quelconque IM,BS; il coupera chacun de ces deux plans suivant des parallèles à 1re. Ces parallèles couperont 2me et 3me aux points P et Q. La droite qui passe par ces deux points est dans le même plan IM,BS que 1re, et rencontre 2me et 3me par construction ; elle appartient donc au système de génération de la succession des droites qui s'appuient sur les trois directrices données. Puisqu'elle est dans le plan IM, BS, sa trace est en R, et sa limite en S. Toutes les autres génératrices de la surface peuvent se construire par le même procédé, et l'on voit comment chacune d'elles concourt à former les trois courbes projectives de l'hyperboloïde. Dans ce cas, le contour apparent est une ellipse, et la surface est vue intérieurement; elle l'était extérieurement dans la figure précédente.

21me PROBLÈME.

Trouver (fig. 22) *le centre de la surface déterminée par les trois directrices* A,B, C,D, E,F.

Solution. Un plan tangent au cône asymptote coupe la surface suivant deux génératrices parallèles: nous n'aurons donc, pour résoudre le problème proposé, qu'à chercher les trois génératrices parallèles aux trois directrices. Chacun des plans déterminés par un de ces couples de génératrices parallèles passe par le centre cherché, puisqu'il passe par le sommet du cône asymptote.

Dans le problème précédent, nous avons fait passer par 2me et 3me un plan parallèle à 1re. L'intersection T, B de ces deux plans est une des droites cherchées; en effet, elle est parallèle à 1re par construction, et elle rencontre 2me et 3me, comme située dans un même plan que chacune d'elles. Faisant donc passer un plan par T, B et par 1re, ce plan, dont TA est la trace, contiendra le centre de la surface. Opérant de même pour chacune des deux autres directrices, l'intersection des trois plans ainsi obtenus sera le centre demandé.

Si l'on donne la projection d'un point sur un hyperboloïde, et qu'on demande de déterminer ce point, ce problème, comme tous ceux du même genre dont nous nous sommes déjà occupés, revient à chercher l'intersection de la surface avec une droite passant par l'œil ; et il suffit, pour le résoudre, de trouver les génératrices qui contiennent le point donné, c'est-à-dire de mener par ce point deux tangentes au contour apparent. En effet chacune de ces tangentes peut être considérée comme la trace d'un plan passant par l'œil et tangent à la surface. Ces plans contiendront chacun deux génératrices, dont les traces et les limites seront données par les intersections de la ligne projective de chacun des plans, avec la trace et la limite de la surface ; on déterminera ainsi quatre génératrices, deux de chaque système de génération : les couples de système différent contiendront les deux points cherchés.

Pour mener un plan tangent à la l'hyperboloïde, par une de ses génératrices, on fera passer par cette droite un plan quelconque, et l'on aura le point de tangence en construisant, comme nous l'avons déjà fait au 20me problème pour le plan IM,BS', la seconde génératrice suivant laquelle ce plan coupe la surface. Le point de contact du plan avec la surface est donné par l'intersection des deux génératrices.

Si l'on demandait le plan tangent à un point donné, il serait déterminé par les deux génératrices passant par ce point.

Enfin, le plan tangent à l'hyperboloïde, par une droite, se réduit à trouver l'intersection de la droite et de la surface, et à faire passer un plan par la droite donnée et par chacune des deux génératrices qui contiennent le point d'intersection de la droite et de la surface. Chacun de ces plans, qui passe également par le second point d'intersection de la droite et de la surface, contient une des deux génératrices qui passent par ce second point, et il est tangent à la surface au point où les deux génératrices de système différent qu'il contient se rencontrent.

L'intersection d'une droite et de l'hyperboloïde s'obtient en faisant passer un plan par cette droite et construisant cinq points de l'intersection de ce plan et de la surface. Les points où la droite donnée rencontre la courbe du second degré, déterminée par ces cinq points, sont évidemment ceux où la même droite perce la surface.

Du Paraboloïde.

Le paraboloïde n'est que le cas particulier de l'hyperboloïde à base hyperbolique sur le tableau, dans lequel l'hyperbole limite se réduit à deux droites, et par conséquent le cône asymptote à deux plans ayant pour trace les asymptotes de la courbe trace.

Le paraboloïde peut se présenter de trois manières en Perspective : ou ses deux droites limites forment un angle, c'est le cas que nous venons d'expliquer; ou elles sont parallèles, alors le tableau est parallèle à l'intersection commune des plans directeurs. Dans ce cas, sa trace est une parabole.

Enfin, une de ces parallèles peut passer à l'infini : c'est le cas où le tableau est lui-même un des plans directeurs. (*Voy.* fig. 28.) Alors la limite et la trace se réduisent chacune à une ligne droite, et la perspective du contour apparent est une parabole, puisque c'est une courbe dont une des tangentes est passée à l'infini ; ce qui indique que le cône projetant de cette courbe a un de ses plans tangens, et par conséquent une de ses génératrices parallèle au plan du tableau.

Tous les problèmes que nous avons résolus pour l'hyperboloïde peuvent s'appliquer au paraboloïde, et se résolvent par les mêmes procédés. En cherchant le centre de cette surface par la construction du 21[me] problème, on voit que ce centre est situé à l'infini, sur la droite intersection des deux plans directeurs.

On sait qu'on engendre cette surface par le mouvement d'une droite qui s'appuie sur deux lignes directrices invariables, et se meut en restant toujours parallèle à un même plan.

Nous allons la décrire par cette propriété.

22[me] PROBLÈME.

Ayant les deux directrices et le plan directeur d'un paraboloïde, trouver le contour apparent et la trace de la surface.

Solution. Soient (fig. 23) A, B et C, D les deux droites données, et EF le plan directeur; par chacune des deux droites, on fera passer deux plans qui leur soient parallèles. La limite BD de ces deux plans, combinée avec

la limite EF, donne les deux droites limites de la surface, puisqu'elles déterminent chacune un plan parallèle à un système de génération.

Menons un plan quelconque IK, EF parallèle au plan directeur. Ce plan coupe les deux lignes A, B et C, D aux points M et N; il coupe la droite C, D dans sa partie réelle, et la droite A, B dans sa partie imaginaire. Faisons passer une ligne par ces deux points; nous aurons une génératrice de la surface. Sa limite est sur EF en R, et sa trace sur IK en T. Nous trouverions, par un procédé analogue, autant de génératrices que nous pourrions le désirer, soit dans l'un, soit dans l'autre système; et il en résultera la figure 23, qui peut donner une idée suffisante de la surface dont nous nous occupons. Nous avons, dans la partie droite de la figure, tracé les deux systèmes de génération; la partie gauche ne contient que celles des génératrices qui sont parallèles au plan EF.

La perspective du contour apparent de cette surface est une ellipse. Pour fermer l'ellipse, il n'y aurait qu'à prolonger les génératrices au-delà de leurs traces et de leurs limites.

Il pourrait paraître surprenant qu'une surface, qui ne peut être coupée par un plan suivant une courbe fermée, ait une ellipse pour perspective de son contour apparent; mais il n'est pas difficile de reconnaître que cette ellipse est la perspective d'une hyperbole, située en même temps sur la surface et sur un plan qui aurait pour limite la ligne qui joint les points de tangence de cette ellipse avec les droites limites de la surface, et pour trace, celle qui joint les deux points de contact de cette même ellipse avec l'hyperbole trace du paraboloïde.

Cette épure, comme toutes celles que nous avons données dans ce second chapitre, est absolument indépendante de la position de l'œil, et par conséquent c'est la perspective d'une infinité de paraboloïdes ayant même trace et même limite sur le tableau. Il suffirait d'y placer l'œil pour qu'elle n'appartînt plus qu'à une seule de ces surfaces; elle fera donc image pour un nombre infini de spectateurs diversement placés. Tous y verront un paraboloïde, mais tous un paraboloïde différent. S'il y avait une génératrice dont la trace et la limite se confondissent, chacun d'eux croirait que cette génératrice se dirige vers son œil. C'est par une illusion semblable que, de quelque manière qu'on regarde certains tableaux, on croit toujours être le but vers lequel se dirige, soit une

flèche, soit le regard du personnage qui y est peint, illusion qui a lieu quelque part que l'on soit placé.

Si nous cherchons l'intersection d'un paraboloïde et d'un plan, par les mêmes considérations que nous avons employées pour l'hyperboloïde, nous reconnaîtrons qu'il n'existe, sur cette surface, que deux sortes de courbes planes, savoir : une parabole, quand la limite du plan sécant passe par le point intersection des limites de la surface, et une hyperbole dans tous les autres cas. Un plan quelconque passant par une génératrice d'un système, contient nécessairement une génératrice de l'autre, excepté lorsque ce plan est parallèle à un des plans directeurs. Dans ce cas, la seconde génératrice de section passe à l'infini.

Toutes les surfaces réglées peuvent être inverties : il suffit pour cela d'invertir leurs génératrices.

Deux surfaces inverties ont entre elles les relations suivantes : leurs contours apparens ont même perspective; la trace de l'une se confond avec la limite de l'autre; une des branches de l'intersection commune des deux surfaces est donnée par la succession des points qui divisent en deux parties égales la portion réelle des perspectives de toutes les génératrices. Deux surfaces inverties se coupent donc toujours suivant une courbe plane. Le plan de cette courbe est parallèle au tableau, et situé du côté opposé à l'œil à une distance égale à celle de l'œil au point de vue.

Des Surfaces non réglées du second degré.

Soit sur le tableau (fig. 24) la courbe AMN, contour apparent d'une surface non réglée du second degré; le centre O de cette courbe est la perspective du centre de la surface dont elle est le contour apparent, puisque la ligne qui joint le point O à l'œil est nécessairement un diamètre. De la position de ce centre dépend la nature de la surface. Supposons, en effet, que ce centre projeté en O se trouve sur la partie réelle d'une ligne A, B : la surface sera un ellipsoïde; car toutes les sections diamétrales faites par cette ligne seront fermées. Si la limite de la ligne est en O', la surface sera un paraboloïde elliptique, puisque les mêmes sections auront leur centre à l'infini; enfin, si la limite de la ligne est en B', les courbes diamétrales, coupées par la ligne limite du plan qui les contient, seront des hyperboles, et la surface sera un

hyperboloïde à deux nappes ayant pour limite une courbe semblable à son contour apparent, semblablement placée, et qu'on peut considérer comme l'intersection de la surface par un plan parallèle au tableau passant par la limite B′ de la droite qui contient le centre, c'est-à-dire situé à l'infini.

Puisqu'il suffit, pour qu'une quelconque des surfaces dont nous nous occupons soit déterminée, de connaître la position de son centre et sa courbe contour apparent, proposons-nous de trouver une des courbes diamétrales d'une quelconque de ces surfaces.

23me PROBLÈME.

Une surface non réglée étant donnée par son contour apparent PMN (fig. 25) *et par la position de son centre sur une droite* A, B, *trouver la courbe diamétrale qui serait donnée par un cylindre tangent ayant sa limite en* R.

Solution. En menant du point R deux tangentes RA et RC au contour apparent, nous aurons les deux génératrices extrêmes du cylindre cherché. Les points A et C où elles viennent chacune rencontrer la courbe PMN située sur le tableau, sont évidemment les traces de ces génératrices, et appartiennent à la courbe diamétrale cherchée : donc la droite AC qui réunit ces points est la trace du plan de cette courbe. Si, par cette trace et par le centre O situé sur la droite A, B, nous faisons passer un plan, ce plan, dont la limite sera BS parallèle à AC, est entièrement connu; il ne reste plus qu'à tracer la courbe qu'il détermine sur la surface. Nous avons deux des tangentes de cette courbe, savoir, les génératrices extrêmes du cylindre auquel elle appartient; deux de ses points, ceux où la trace AC de son plan rencontre le contour apparent; la perspective de son centre O, qui se confond avec celui de la surface, puisque cette courbe est diamétrale; enfin, la limite BS du plan qui la contient. En observant que le centre d'une courbe et la limite de son plan sont polaires l'un de l'autre, on pourra tracer par points la courbe cherchée. En effet, en menant par O, pôle de BS, une parallèle à cette ligne, et joignant le point *a*, où cette parallèle rencontre la tangente RA, au point T, où la polaire rencontre l'autre tangente RC, on a une nouvelle tangente T*a* à la courbe cher-

chée, et l'on sait comment tracer une courbe du deuxième degré quand on a trois tangentes à cette courbe, et deux de leurs points de contact.

Pour démontrer que Ta est tangente à la courbe cherchée, on n'a qu'à remarquer que les deux lignes C, T et a, T sont parallèles dans l'espace, comme ayant même limite, et que ces droites coupent la transversale Oa, parallèle au tableau, en deux points également distans du centre O. Or, l'une de ces droites est tangente à la courbe; donc l'autre doit l'être aussi; car deux tangentes à une courbe du second degré, quand elles sont parallèles, sont également distantes de son centre. CO étant le demi-diamètre qu'elles soutendent, cette ligne prolongée viendra rencontrer aT au point de tangence. Ce point appartient au cône diamétral qui a pour base sur le tableau le contour apparent; ce cône coupe la surface suivant deux courbes parallèles, et par conséquent semblables : on n'a donc qu'à mener par le point de tangence de Ta une courbe concentrique et semblable au contour apparent, ce sera la perspective de la seconde intersection du cône diamétral avec la surface.

En choisissant pour plan du tableau celui du contour apparent, la surface s'est trouvée divisée en deux parties, l'une vue tout entière en avant du tableau, et l'autre cachée derrière le tableau. Tout plan qui rencontre cette surface dans sa partie vue, la coupera donc en avant de sa trace. Dans la courbe diamétrale que nous venons de construire, toute la partie CHH'A située en avant de la trace de son plan est vue et toute l'autre partie est cachée. Il en serait de même de tout autre plan dont la trace couperait le contour apparent. Si la trace du plan sécant était extérieure au contour apparent, ce plan couperait la surface suivant une courbe ou tout entière vue, ou tout entière cachée.

24me PROBLÈME.

Un point étant donné en perspective sur une surface non réglée du second degré, déterminée par son contour apparent et son centre, trouver une section diamétrale de la surface passant par le point donné.

Solution. Soit (fig. 25) PMN le contour apparent donné, soit A,B la ligne qui contient le centre, et soit V la perspective du point donné; il

est évident que deux points ont leur perspective commune en V. L'un de ces points est situé sur la partie vue, et l'autre sur la partie cachée de la surface.

Cherchons d'abord une courbe quelconque située sur la surface, et qui contienne le point V : soit la courbe donnée par l'intersection d'un plan dont la trace est DE. En donnant à ce plan la condition de passer par le point donné, sa courbe d'intersection avec la surface est entièrement déterminée. Elle doit, en effet, avoir mêmes tangentes que le contour apparent aux deux points E et D où la trace de son plan rencontre cette courbe, et elle doit passer par le point donné. On sait que ces cinq conditions suffisent pour tracer une courbe du second degré. Comme nous avons choisi pour trace du plan de la courbe cherchée une ligne passant par le centre du contour apparent, cette ligne, qui joint les points de contact de deux tangentes parallèles, est un diamètre de la courbe cherchée, et, dans ce cas particulier, son grand axe, puisqu'elle aboutit à deux tangentes qui lui sont perpendiculaires. Ayant le grand axe et un point V d'une courbe, une construction très simple donne quatre autres points, et, par suite, la courbe tout entière.

Une courbe ainsi tracée sur la surface n'est encore assujettie qu'à avoir DE pour trace de son plan; elle peut occuper deux positions distinctes autour de cette ligne. En effet, sa partie vue peut être l'arc DVE, et alors le reste de la courbe appartient à la partie cachée de la surface; ou bien, c'est l'arc DZE qui est sur la partie vue, et l'arc DVE qui se trouve sur la partie cachée. On voit que chacune de ces courbes passe par un des deux points de la surface qui ont même perspective en V. Les perspectives de ces deux courbes se confondent; elles sont toutes deux sur un cône ayant son sommet à l'œil, et qui est tangent au cône projetant du contour apparent suivant les deux génératrices qui ont leurs perspectives en D et en E. L'intersection du premier de ces cônes avec la surface, qui doit être du quatrième degré, se réduit aux deux courbes planes que nous venons de considérer. Puisque nous avons la trace commune des plans, de ces courbes, il ne reste plus qu'à trouver leurs limites respectives nécessairement parallèles à DE. Pour cela, choisissons un plan diamétral dont la courbe rencontre en quatre points la courbe DVEZ. Soit le plan diamétral dont la trace est en AC,

et dont nous décrirons la courbe par le procédé du 23me problème; menant les deux sécantes HI et H′I′ communes à la courbe diamétrale et à la courbe DVEZ, qui viennent passer par le point K intersection des traces des plans de ces courbes, chacune de ces sécantes sera la perspective de l'intersection du plan diamétral avec un des deux plans de la courbe DVEZ. Ces intersections auront leurs limites sur la limite TS du plan diamétral; et, comme elles appartiennent chacune à un des plans sécans, en faisant passer, par chacune de ces limites, une parallèle à la trace commune DE de ces plans, ces parallèles seront les limites de ces deux plans. Les deux points projetés en V, se trouvant ainsi sur deux plans connus, on pourra construire la ligne qui joint chacun de ces points au centre, également connu, de la surface; et tout plan passant par une de ces lignes sera évidemment un plan diamétral satisfaisant aux conditions du problème.

25me PROBLÈME.

Un point étant donné en perspective sur une surface non réglée du second degré, trouver le plan tangent à ce point de la surface.

Nous savons que la même perspective correspond à deux points sur la surface; deux plans satisferont donc aux conditions de ce problème.

Solution. Quand on mène deux tangentes au contour apparent d'une surface du second degré (fig. 24), ces deux tangentes CD et CE peuvent être considérées comme les traces de deux plans passant par l'œil, tangens à la surface, et ayant par conséquent leurs points de tangence sur le contour apparent aux points D et E, où leurs traces touchent la courbe. Leur commune intersection, qui passe également par l'œil, a sa perspective en C, point de rencontre des deux traces. Si l'on suppose une suite de cônes tangens à la surface, ayant leurs sommets sur cette commune intersection, la surface enveloppe de tous ces cônes sera l'ensemble des deux plans CD et CE, et les plans des courbes de tangence de ces cônes auront pour trace commune la corde qui joint les deux points E et D, points communs à la surface enveloppe et au contour apparent; de plus, il y aura toujours une de ces courbes dont le plan passera par l'œil, et dont cette corde est par conséquent la projection : c'est celle qui provient du cône ayant son

sommet sur le plan du contour apparent, et, dans notre supposition, sur le tableau.

Si donc, par la perspective du point P donné fig. 24, sur la surface dont le contour apparent est AMN, nous menons deux cordes quelconques ED et LI au contour apparent, elles pourront être considérées comme la perspective des courbes de contact de deux cônes tangens à la surface ayant leur sommet sur le tableau, et ce sommet sera déterminé par la rencontre des deux tangentes menées à l'extrémité de chaque corde. Ces deux courbes passant chacune par le point donné, le plan tangent commun aux deux cônes sera évidemment celui que nous cherchons; mais ce plan passe par les sommets de ces deux cônes; donc, si l'on joint les points de rencontre C et H des deux couples de tangentes, on aura sur le tableau une ligne appartenant au plan tangent cherché, et par conséquent sa trace.

Remarquons ici que la trace ainsi trouvée est commune aux deux plans tangens cherchés, l'un appartenant au point vu, et l'autre au point caché, dont les perspectives se confondent en P; et que, puisque, pour obtenir cette trace, nous n'avons pas eu besoin de préciser le centre de la surface, et par conséquent d'indiquer sa forme, nous pouvons conclure que toutes les surfaces non réglées du second ordre, qui ont pour contour apparent la même courbe AMN, ont aussi pour trace de leur plan tangent, au point où elles sont rencontrées par la ligne qui joint l'œil au point P, la même ligne HC, polaire de ce point.

Pour avoir les limites des deux plans tangens, il faut particulariser la surface, c'est-à-dire déterminer son centre. Le centre déterminé, on cherchera (24me problème) deux plans qui contiennent chacun un des deux points de tangence. Ces plans trouvés, leur commune intersection avec le plan tangent auquel ils correspondent est connue de direction, puisqu'elle doit passer par le point de contact et par l'intersection des traces des deux plans; la limite de cette commune intersection devant se trouver sur la limite du plan sécant, est donc aussi connue: mais cette limite doit aussi se trouver sur la limite cherchée du plan tangent dont on connaît la direction; on pourra donc construire cette limite.

Puisque nous pouvons mener un plan tangent en un point donné

d'une surface du second degré, nous pourrons tracer la tangente d'une courbe plane située sur cette surface ; car cette tangente est l'intersection du plan sécant et du plan tangent.

Il s'ensuit que (fig. 25), pour mener une tangente au point V de la courbe DVEZ, il suffit d'avoir la trace du plan tangent à ce point, c'est-à-dire la polaire du point V. Cette trace coupera la trace DE du plan sécant en un point qui appartiendra à la tangente cherchée : ce sera celui où les tangentes en V, à chacune des courbes projetées selon DVEZ, viendront percer le tableau. Ces deux tangentes, qui ont même trace et même plan projetant, ne différeront que par leurs limites.

26me PROBLÈME.

Trouver l'intersection d'un plan quelconque avec une surface non réglée du second degré.

Solution. Ce problème peut présenter deux cas : ou la trace du plan sécant rencontre le contour apparent de la surface, ou elle est extérieure à cette courbe. Dans le premier cas, les deux points d'intersection, de la trace du plan et du contour apparent, donnant deux points de la courbe cherchée, et les deux tangentes au contour apparent étant communes en ces points à l'une et à l'autre courbe, pour que le problème soit résolu, il suffit de trouver encore un seul point de la commune intersection du plan et de la surface. On l'obtient en menant un plan diamétral tel, que la courbe qu'il détermine sur la surface rencontre la droite commune intersection de son plan avec le plan sécant ; ces points appartenant à la surface et à ce dernier plan, il ne restera plus qu'à tracer la courbe cherchée par les procédés connus.

Dans le cas où la trace du plan sécant ne rencontre pas la courbe contour apparent, il est possible que ce plan ne coupe pas la surface ; mais comme le dernier point où il peut la rencontrer est évidemment le point de tangence d'un plan ayant même trace, c'est-à-dire, comme nous venons de le voir, le point qui a pour perspective le pôle de la trace du plan sécant par rapport au contour apparent, il s'ensuit que si nous faisons passer par ce point un plan diamétral de la surface, et que la courbe diamétrale ne soit pas rencontrée

par la droite intersection commune de son plan et du plan sécant, ce dernier ne coupe pas la surface; dans le cas contraire, les deux points d'intersection appartiennent à la courbe cherchée, et cette courbe ayant la trace de son plan pour sécante imaginaire commune avec le contour apparent, il suffira de ces deux points pour qu'elle soit entièrement connue.

En général, pour résoudre ce problème, on peut se contenter de mener un plan diamétral dont la courbe passe près du pôle de la trace du plan sécant. Il faudrait, en effet, que le plan sécant fût presque tangent pour qu'il ne rencontrât pas cette courbe diamétrale.

Soient donc (fig. 26) la surface dont le contour apparent est AMN, et dont le centre est en O sur la ligne A,B; et soit le plan ET, PQ dont on demande l'intersection avec cette surface. Si ce plan était tangent, c'est-à-dire le dernier des plans sécans qui ont même trace ET, il rencontrerait la surface au point I, pôle de cette ligne; si nous menons un plan diamétral AN', BM, ce plan coupera la surface suivant une courbe ADC, et le plan ET, PQ suivant une droite N'C, qui elle-même rencontrera la courbe diamétrale aux points D et C. Ces deux points sont donc communs au plan sécant et à la surface : ce sont donc deux points de la courbe cherchée. Nous pourrions, par un procédé analogue, trouver autant d'autres points de cette courbe qu'on désirerait; mais nous allons faire voir que ces deux points suffisent à sa description. En effet, la courbe cherchée a pour sécante commune imaginaire avec le contour apparent la trace de son plan ET, et le pôle de cette sécante est pour les deux courbes en I. Donc, si par I nous menons une droite ID, cette droite viendra couper le contour apparent en un point V, tel, que les tangentes aux points D et V viendront se rencontrer sur la sécante imaginaire. Menant donc au contour apparent la tangente TV, la ligne TD devra être tangente au point D à la courbe cherchée. Opérant de même pour le point C, nous trouverons une seconde tangente EC à cette courbe; nous pourrons dès lors la tracer. Nous avons déjà fait voir, au 23me problème, comment, lorsque l'on a deux points d'une courbe du second degré, deux tangentes à ces points, le pôle et sa polaire, on pouvait mener d'autres tangentes à la courbe, et la construire par conséquent.

On voit que la courbe obtenue est tout entière sur la partie vue de la surface, puisqu'elle est tout entière en avant de la trace du plan qui la contient.

27me PROBLÈME.

Par une droite donnée mener un plan tangent à une surface non réglée du second ordre.

Solution. Si l'on mène à la surface un cylindre tangent parallèle à la droite donnée, et que, par le point où cette droite perce le tableau, on mène un cône également tangent à cette surface, les points d'intersection des courbes de tangence du cylindre et du cône donneront les points où le plan cherché doit toucher la surface. Or, la courbe de contact du cylindre est une courbe diamétrale, et la courbe de contact du cône se projette suivant la droite qui joint les points de tangence de ses génératrices extrêmes avec le contour apparent de la surface : le problème est donc réduit à trouver l'intersection d'une droite avec une courbe du second degré.

Appliquons ces considérations à la fig. 27, dans laquelle DSCTR est le contour apparent d'une surface non réglée, ayant son centre O à l'infini; et supposons que l'on demande de mener par la droite A, B un plan tangent à cette surface que nous savons être un paraboloïde elliptique. Par chacun des points A et B, nous mènerons deux tangentes au contour apparent : la ligne DC qui joint les points de tangence des génératrices du cylindre parallèle à A,B, sera la trace de la courbe diamétrale déterminée par ce cylindre; et la ligne TS qui joint les points de contact des tangentes provenant de la trace de A, B sera la projection de la courbe de contact du cône ayant son sommet en A sur le tableau. Les points de tangence cherchés seront, comme nous l'avons annoncé, ceux où la droite TS rencontrera la courbe diamétrale qui a sa trace en DC. Puisque la surface a son centre à l'infini, la limite du plan diamétral dont la trace est DC doit passer par la perspective du centre; par conséquent, cette limite sera la ligne EF parallèle à DC, et passant par le centre du contour apparent. De plus, la ligne EF sera tangente à la courbe diamétrale au centre même, puisque le centre d'une courbe et la limite de son plan sont réciproquement polaires.

Nous avons donc trois tangentes à la courbe diamétrale cherchée,

savoir : BD, BC et EF. Nous pouvons, sans tracer cette courbe, trouver les points où elle est rencontrée par TS. En effet, la courbe cherchée et le contour apparent ont DC pour sécante réelle commune ; nous pouvons donc considérer ces deux courbes comme se trouvant sur un même cône, dont B serait la perspective du sommet et DSCT la trace ; et il suffira d'avoir l'intersection de la droite ST, située dans le plan de la courbe non-tracée, avec ce cône, pour avoir les points où cette droite coupe cette courbe. Si, par la droite ST et le sommet B, nous faisons passer un plan, ce plan et le plan tangent au cône ayant RH pour trace auront la ligne BH pour commune intersection. En effet, ce plan tangent contiendra la tangente EF parallèle à sa trace ; le point Y, où cette tangente rencontre TS, est donc un point de cette commune intersection qui doit en outre passer par le sommet B du cône ; le point H appartient donc à la trace du plan qui passe par TS et le sommet ; le point P, où TS coupe la sécante commune, est un autre point de cette trace : donc la ligne HP est la trace du plan cherché. Cette trace coupe la base du cône en deux points *a* et *b* ; menant par ces deux points les génératrices du cône *a*B et *b*B, les points I et L, où ces génératrices rencontrent TS, sont les points où cette droite coupe le cône, et par conséquent où la même droite rencontre la courbe que nous nous sommes dispensés de tracer. L'un de ces deux points, L, est sur la partie vue de la surface, puisqu'il est situé en avant de la trace de son plan ; l'autre I est sur la partie cachée.

Ayant en projection sur la surface les deux points de tangence, nous n'avons, par A, qu'à mener les deux polaires de ces points, ce seront les traces des plans tangens cherchés ; et, par B, qu'à mener deux parallèles à ces polaires, ce seront les limites de ces mêmes plans.

Pour comprendre la partie de cette solution qui a trait à l'intersection de la droite et de la courbe, il faut oublier ce que la figure représentait auparavant, pour ne plus y voir qu'un cône, et une courbe plane située sur ce cône, dont on a une tangente EF, et la trace CD de son plan, et supposer que la droite TS est située dans le plan de cette courbe. Il faut quelque temps pour se familiariser avec cette manière de passer d'une surface à une autre, dont les lignes projectives ont certaines parties communes ; si l'on éprouve quelques difficultés

à concevoir cette démonstration, on peut se contenter de tracer la courbe diamétrale par points, et l'on obtiendra par un procédé un peu plus long les points d'intersection cherchés.

28me PROBLÈME.

Trouver l'intersection d'une surface non réglée du second ordre avec une droite.

Solution. En faisant passer un plan par la droite donnée et le centre de la surface, ce plan sera diamétral; sa trace coupera la courbe contour apparent, ou sera extérieure à cette courbe. Dans le premier cas, nous avons déjà vu (24me problème) comment on obtenait la courbe diamétrale; dans le second cas, il faudrait déterminer la section diamétrale, comme nous l'avons fait au 26me problème pour un plan quelconque; les points de rencontre de la courbe diamétrale et de la droite seront évidemment ceux où elle coupera la surface.

Nous terminerons les problèmes qui concernent les surfaces non réglées du second degré, en faisant remarquer que les solutions que nous venons de donner sont communes à la sphère, à l'ellipsoïde, au paraboloïde elliptique et à l'hyperboloïde à deux nappes; sauf les modifications qui résulteraient dans le tracé des figures de la position du centre en perspective réelle, à l'infini, ou en perspective imaginaire. Quoique, pour la commodité du dessin, nous ayons adopté des cercles pour contour apparent, il est évident que, puisque la forme des surfaces dépend de la position de l'œil par rapport à ces cercles, les épures présentent toute la généralité que l'on peut désirer. Ces surfaces ne seraient de révolution que dans le cas où, en plaçant l'œil, le point de vue se confondrait avec la perspective de leurs centres.

On pourrait demander à quelle élévation il faudrait que l'œil se trouvât au-dessus du point O (fig. 25) pour que la surface qui y est projetée fût une sphère. Dans la sphère, toute ligne qui passe par le centre doit être perpendiculaire au plan tangent, au point où la

ligne rencontre la surface; l'œil devrait donc être placé de manière à ce que la ligne A, B fût perpendiculaire au plan AR, c'est-à-dire que le point B fût normal de la ligne AR. En construisant sur AB une demi-circonférence, l'ordonnée élevée au point O, dans cette circonférence donnera la distance à laquelle il faudrait placer l'œil au-dessus du tableau, pour que la surface dont le contour apparent est PMN représentât une sphère : l'œil placé, on aurait le rayon de cette sphère en cherchant la grandeur de AO sur la droite A, B.

Après avoir montré comment se déterminent, en perspective, les surfaces du 2me degré, et comment se résolvent les différens problèmes qui s'y rattachent, il nous reste à indiquer sommairement le moyen de projeter les différens genres de surface que l'on a coutume de considérer dans les arts. Toutes celles qui sont engendrées par une ligne droite, tant les développables, que les non développables, auront une courbe trace, une courbe limite, et un contour apparent dont la projection, comme dans les surfaces réglées du 2me degré, sera l'enveloppe de la perspective de toutes les génératrices; et quand on aura écrit en perspective les données qui servent à diriger le mouvement de la génératrice, on pourra construire cette génératrice à volonté dans une quelconque de ses positions. On trouvera dans les chapitres suivans deux exemples de ces sortes de surfaces; d'abord, le conoïde à base circulaire, qui nous servira à la solution d'un problème connu de Géométrie plane; enfin la surface rampante de la vis triangulaire dans l'épure de cette machine.

Les surfaces enveloppes auront évidemment pour contour apparent une courbe tangente à la succession des contours apparens de l'enveloppée dans ses diverses positions. Leur caractéristique étant la courbe, intersection de deux enveloppées successives dans leur mouvement différentiel, quand l'enveloppée et sa marche seront connues, il sera toujours possible de tracer cette caractéristique, et par conséquent d'opérer sur la surface elle-même.

Nous ne pouvons nous dispenser d'indiquer ici la manière de représenter en perspective une autre espèce de surfaces plus généralement employées : ce sont celles connues sous le nom de surfaces

de révolution; on sait qu'elles sont engendrées par une courbe plane, qui tourne autour d'une droite fixe prise dans son plan. La droite et la courbe étant données, on peut rabattre le plan d'un méridien quelconque sur le tableau, y tracer la méridienne, et ramener ensuite cette courbe dans la position première, par les procédés indiqués au 15me problème; la succession des courbes méridiennes en perspective sera touchée par le contour apparent de la surface; ces méridiennes auront toutes pour sécante commune, réelle ou imaginaire, l'axe de la surface (1), c'est-à-dire que les tangentes à ces courbes, ayant leurs points de contact sur le même cercle perpendiculaire à l'axe, se rencontreront en un même point de cet axe, ce qui fournit un moyen de mener une tangente à un point donné d'une courbe méridienne dans une quelconque de ses positions, et par conséquent, de construire le plan tangent à ce point de la surface, puisque ce plan tangent doit contenir la tangente à la courbe méridienne et être perpendiculaire au plan de cette courbe.

Si, parmi tous les plans méridiens, il y en a un qui soit parallèle au tableau, la projection de la courbe méridienne donnée par ce plan est semblable à la courbe d'où elle provient, et semblablement placée. Dans ce cas, l'axe de la surface est aussi parallèle au tableau. La projection du contour apparent peut alors s'obtenir par des procédés assez simples et qui fournissent la tangente à chaque point du contour apparent. Ces procédés seront donnés avec tout le développement nécessaire dans l'épure d'application représentant la surface annulaire : nous renvoyons donc à l'explication de cette épure.

Intersection des surfaces du second degré entre elles.

La méthode générale pour trouver l'intersection de deux surfaces est de les couper par une suite de plans : l'intersection de chaque couple de courbes produites par ces plans donne la série des points communs aux deux surfaces.

Quand une des deux surfaces est réglée, il convient de prendre pour plans sécans des plans tangens à la surface réglée, puisque la solution

(1) Nous n'employons ici ce mot de *sécante commune* que par analogie avec les propriétés des courbes du second degré.

précédente se réduit alors généralement à l'intersection de deux droites et d'une courbe. Quand les deux surfaces sont réglées, il est possible de choisir une suite de plans qui coupent les deux surfaces suivant des droites. Nous en avons donné un exemple dans la fig. 28, qui est l'épure de l'intersection du cylindre PNM, S et du paraboloïde CD, BD. Ce paraboloïde est un cas particulier : le plan du tableau est un de ses plans directeurs ; sa trace est une ligne droite, et une de ses limites, celle qui correspond au tableau, est passée à l'infini. Nous ne donnerons qu'une explication succincte de cette épure, parce qu'elle est la traduction de la même épure orthogonale : le plan sécant IA, SB passant par deux génératrices du cylindre, et contenant la génératrice A, B de la surface, donne, en R et en P, deux points de la courbe cherchée. Nous n'offrons ici cette épure que pour faire voir avec quelle facilité la projection polaire se prête au genre de considération que comporte l'intersection des surfaces réglées. La tangente à la courbe au point P serait l'intersection des plans tangens en P aux deux surfaces, c'est-à-dire du plan tangent au cylindre suivant la génératrice HS, et du plan tangent en P au paraboloïde; la trace de ce dernier passerait par le point A parallèlement à la perspective de la seconde génératrice qui passe par P et qui est parallèle au tableau.

Les parties vues et les parties cachées de la courbe d'intersection sont déterminées par les mêmes principes qu'en projection orthogonale. Pour qu'un point soit vu, il faut qu'il résulte de l'intersection de deux génératrices vues. Tout point qui ne satisfait pas cette condition est caché, ou par une des surfaces, ou par toutes les deux ensemble. Dans le cas général où le point P serait donné par l'intersection de deux courbes, on appliquerait aux parties vues et aux parties cachées de ces courbes les règles que nous venons d'employer pour les génératrices, et l'on reconnaîtrait de même quelles sont les parties vues et les parties cachées de la commune intersection des deux surfaces.

Nous ne nous appesantirons pas davantage sur ces considérations; ceux qui auront bien conçu la méthode pourront en faire l'application aux divers exemples d'intersection de surfaces donnés en Géométrie descriptive.

PROPRIÉTÉS DE GÉOMÉTRIE, DÉDUITES DU IIme CHAPITRE.

1er *Lemme.* Une courbe quelconque du second degré et deux de ses tangentes peuvent être considérées comme la perspective d'un cône ou d'un cylindre, le point de rencontre des deux tangentes étant le sommet de l'un ou la limite de l'autre. La corde qui joint les points de contact des tangentes est la trace du plan qui passe par les deux génératrices, contour apparent des deux surfaces.

2me *Lemme.* La même figure peut être regardée comme la perspective d'une infinité de surfaces non réglées du second ordre, ayant toutes cette courbe pour contour apparent; les deux tangentes sont alors la trace de deux plans tangens à la surface, et passant par l'œil; l'intersection commune de ces plans se projette au point de rencontre des deux tangentes.

3me *Lemme.* Deux courbes du second degré, semblables et semblablement placées, peuvent être considérées comme la trace et la limite d'un cône ayant son sommet aux points de la ligne qui joint leurs centres où les tangentes communes aux deux courbes viennent se rencontrer.

4me *Lemme.* Deux courbes quelconques, A et B, du second degré, et le système de deux de leurs tangentes communes qui les embrassent dans le même angle ou dans son opposé au sommet, peuvent être considérées comme situées sur le même cône, dont l'une quelconque A est la trace, et dont le point de rencontre des tangentes est la perspective du sommet. En effet, il n'y a qu'à remarquer que le cône projetant de B a deux plans tangens communs avec le cône qui a A pour base: ce sont les deux plans du contour apparent de ce dernier; donc ces deux cônes se coupent suivant une courbe du quatrième degré, qui se réduit à deux courbes planes ayant pour projection commune la courbe B. Si l'on cherche le lieu des traces des tangentes à chacune des deux courbes projetées en B, c'est-à-dire si l'on cherche les points où chaque tangente à ces courbes vient rencontrer la trace du plan tangent au cône A qui la contient, la série de ces traces donne en général deux lignes droites, qui sont deux des sécantes réelles ou imaginaires communes aux deux courbes A et B; et ces sécantes sont sur le plan de A la trace des deux plans des courbes B, car, puisque ces courbes sont planes, leurs tangentes sont contenues dans leurs plans respectifs, et la suite des traces des tangentes est la trace même du plan qui les contient.

5me *Lemme.* Des considérations analogues prouveraient que, si l'on imagine deux cônes quelconques ayant pour trace chacun les courbes A et B, mais tels, que la droite qui joint leurs sommets vînt percer le tableau en un des points de rencontre *a* des tangentes communes à ces deux courbes, ces cônes se couperaient suivant deux courbes planes ayant pour trace les deux sécantes communes, réelles ou imaginaires, de A et B provenant du point *a*.

Nous avons fait voir dans les notes qui terminent le Ier chapitre comment les propriétés des pôles et polaires sur un plan se déduisaient avec simplicité d'une épure de perspective ; ces propriétés ayant leurs analogues dans l'espace, par rapport aux surfaces du second ordre, les considérations suivantes, que nous déduirons de la figure 24, vont servir à les faire connaître.

Les surfaces du second ordre sont divisées en deux classes : les unes sont *réglées*, et les autres *non réglées ;* cette différence en entraîne une remarquable dans leurs projections polaires. Soit en effet (fig. 24) la courbe AMN contour apparent d'une surface du second degré ; il est facile de voir qu'elle peut être en même temps le contour apparent d'une surface réglée et d'une surface non réglée, qui se toucheraient suivant leur contour apparent. Ces surfaces n'auraient aucun autre point commun que cette courbe, et leurs perspectives s'excluraient. Pour que cette courbe fût le contour apparent d'une surface réglée, il suffirait d'indiquer que le centre de la surface à laquelle elle appartient se trouve entre l'œil et le tableau, c'est-à-dire que la ligne ayant sa trace sur le contour apparent, et passant par le centre de la surface, eût sa perspective réelle tout entière hors de cette courbe ; alors le centre serait sur cette droite en avant de sa trace. Si, dans cette supposition, l'on cherchait une des courbes diamétrales de la surface, on trouverait une courbe extérieure au contour apparent, et touchant ce contour aux points d'intersection de la trace de son plan.

Le plan de la courbe AMN se divise en deux parties distinctes : l'une par laquelle on peut mener des tangentes à cette courbe, et l'autre par laquelle on ne peut lui en mener. La première est le lieu de la perspective de la surface réglée, et la seconde celui de la surface non réglée ; il n'y a donc aucun point du plan qui ne soit la perspective d'un point appartenant à une de ces deux surfaces, et il suffit de savoir qu'il appartient à l'une pour en conclure que la droite qui joint ce point à l'œil ne peut rencontrer l'autre.

Sans rien déterminer sur la nature de ces surfaces, nous pouvons déjà reconnaître plusieurs de leurs propriétés, qui seront communes, par conséquent, à toutes les surfaces du second ordre, puisque, suivant que le centre sera à une distance finie, à une distance infinie, au-delà de la limite ou en avant de la trace, cette figure pourra toutes les représenter (1). Menons à la courbe donnée deux couples de tangentes, joignons par une droite HC les deux points d'où proviendront deux à deux ces quatre tangentes, et traçons les cordes qui joignent les points de contact de chaque couple. Nous avons déjà vu dans le cours de l'ouvrage que HC est la trace du plan tangent dont le point de contact se projette en P, pôle de HC, et que le point P correspond à deux points sur la surface non réglée AMN, l'un vu et l'autre caché.

(1) Excepté le paraboloïde hyperbolique, qui ne peut être coupé par le tableau suivant une courbe fermée.

Tout cône tangent à la surface, et ayant son sommet sur la ligne qui joint le point H à l'œil, a pour perspective de son contour apparent les deux tangentes provenant de ce point, et par conséquent (1er lemme), la corde LI pour trace du plan de son contour apparent. Cette droite est donc commune à tous ces cônes; les droites H et LI sont donc polaires l'une de l'autre. Tout cône tangent à la surface, assujetti à avoir son sommet sur le plan projetant de CH, a le point P (1) compris dans le plan de sa courbe de contact; ce point et ce plan sont donc réciproquement polaires.

Enfin, puisque tout cône ayant son sommet sur le tableau, détermine sur la surface une courbe de contact dont le plan passe par l'œil, le plan du contour apparent et l'œil sont réciproquement polaires.

Passons maintenant aux propriétés de la surface réglée : Chacune des tangentes HL et HI peut être considérée comme la trace d'un plan passant par l'œil, et tangent à la surface reglée dont AMN est le contour apparent; chacun de ces plans contient deux génératrices de système différent, dont les perspectives se confondent; ces quatres génératrices se rencontrent en quatre points : les points mêmes de tangence L et I, plus deux points représentés en perspective par le point H. Ces derniers sont, par conséquent, les points de contact de la surface avec un plan tangent qui aurait pour trace la ligne LI, polaire du point H, propriété analogue à celle des surfaces non réglées.

Si le point H est assujetti à se mouvoir sur la courbe plane de la surface dont HC est la projection, la trace de tous les plans tangens passera par le point P; donc, la suite des plans tangens, suivant une courbe dont le plan passe par l'œil, détermine un cône dont le sommet est sur le tableau. Ce sommet est le pôle du plan de la courbe; et puisque le plan de cette courbe passe par l'œil, l'œil est le pôle du plan du tableau. Sans doute ces propriétés ne sont pas nouvelles, mais elles se déduisent si simplement que nous n'avons pas cru devoir omettre cette manière d'en présenter la démonstration.

On voit que le pôle d'une droite, par rapport à une courbe du second degré, quand on considère cette courbe comme le contour apparent d'une surface du second ordre, reçoit en projection polaire plusieurs significations, outre celle que nous avons déjà donnée. (*Voir* les notes à la suite du premier chapitre.)

Le pôle est, dans ce cas, la perspective du point de contact d'un plan tangent à la surface du second degré, qui aurait la courbe donnée pour contour apparent, la trace de ce plan étant la polaire.

Ou bien c'est la perspective du centre d'une surface du second degré, ayant la courbe donnée pour contour apparent, en supposant cette courbe, non sur le tableau, mais sur un plan dont la polaire serait la limite.

---

(1) Le point P représentant généralement une ligne, est la perspective commune de trois points sur cette ligne, savoir : les deux points où elle rencontre la surface, et le point où elle rencontre le tableau; c'est de ce dernier qu'il s'agit ici.

Enfin, c'est le sommet d'un cône tangent à la surface du second degré suivant une courbe plane dont la polaire serait la perspective.

Si, dans la figure 25, correspondante au 24me problème, et représentant un point V sur une surface non réglée, et une courbe DVEZ située sur la surface et contenant ce point, nous eussions pris ce point hors du contour apparent, nous aurions pareillement trouvé une ellipse ayant DE pour grand axe et contenant le point donné; mais cette ellipse, tout entière hors du contour apparent, n'eût pu appartenir à la surface non réglée dont il s'agit dans ce problème. Les considérations ci-dessus nous indiquent qu'elle appartiendrait à la surface réglée qui lui serait conjugée, c'est-à-dire ayant son centre sur la même ligne projetante et même contour apparent.

La projection polaire présente ici une analogie remarquable avec l'Algèbre : non-seulement elle indique que la question a été mal posée, mais encore elle fait connaître les modifications qu'il faut faire subir à l'énoncé pour que le problème ait une solution réelle.

Problème de la tangente commune à deux cercles.

Ce problème, par les considérations du 3me lemme, peut se ramener au suivant : *La trace et la limite d'un cône étant données, trouver la perspective du sommet.* Il suffira, pour le résoudre, de construire deux génératrices du cône. En menant aux deux cercles quatre tangentes parallèles, chaque couple de tangentes peut être considéré comme la trace et la limite d'un plan tangent au cône cherché (pourvu que les deux tangentes n'appartiennent pas au même cercle); les points de contact des couples que nous considérons sont donc, l'un la trace, et l'autre la limite d'une même génératrice. On peut donc tracer la perspective de cette génératrice. L'intersection commune de deux génératrices ainsi obtenues est la perspective du sommet du cône, et, par conséquent, le point d'où l'on peut mener les deux tangentes communes aux deux cercles. Nous n'avons pas besoin de faire remarquer que ce problème a deux solutions, l'une fournie par les génératrices qui se rencontrent dans la partie réelle de leurs perspectives, l'autre par celles qui se rencontrent dans la partie imaginaire. Nous rappellerons ici qu'il n'y a de lignes qui puissent se rencontrer dans l'espace que celles dont les traces et les limites déterminent deux parallèles.

Ce que nous venons de dire pour le cercle, est évidemment applicable à deux courbes du second degré, semblables et semblablement placées, et même à deux courbes quelconques, qui seraient semblables et semblablement placées, c'est-à-dire pouvant être considérées comme la trace et la limite d'un même cône.

Toutes les questions d'intersection et de tangence d'une droite et d'une courbe A, du second degré, se ramènent à des questions analogues entre une droite et

un cercle, au moyen du 4me lemme; il n'y a, en effet, qu'à mener à la courbe donnée, par un point quelconque, deux tangentes, et inscrire un cercle entre ces deux tangentes; ce cercle se trouve alors être la perspective de deux courbes planes a et b situées sur le cône déterminé par la courbe A et par les deux tangentes (1er lemme). Une des sécantes communes de la courbe A et du cercle est la trace du plan d'une de ces courbes a et b (4me lemme). D'après ces données, en faisant passer par la droite proposée et le sommet du cône un plan, il coupera le plan dont la sécante est la trace suivant une droite qui aura en projection avec le cercle les relations analogues à celles que la droite primitive et la courbe A avaient entre elles; car, si l'on supposait l'œil transporté au sommet du cône, la courbe A serait à son tour la projection polaire des courbes a et b. On peut consulter sur les différens cas particuliers que présente ce problème, l'excellent ouvrage de M. Poncelet, *sur les propriétés projectives des figures;* on reconnaîtra qu'une grande partie des figures dont il se sert rentrent dans la solution générale que nous venons d'indiquer, et sont par conséquent des épures de projection polaire.

L'élégante solution à laquelle M. Gergonne est parvenu par l'analyse, pour obtenir le cercle tangent à trois cercles donnés, est encore une épure polaire. Nous rappellerons d'abord cette solution, à laquelle nous sommes aussi parvenus par les considérations géométriques que nous allons développer.

Soient trois cercles A, B, C; on sait que les points de rencontre des tangentes communes à ces trois cercles se trouvent répartis sur quatre droites: à chacune de ces droite, prise comme polaire, correspond un pôle dans chaque cercle; leur ensemble détermine donc douze pôles. On sait de plus que les trois cercles ont, deux à deux, une sécante commune, et que ces trois sécantes se rencontrent en un même point. Si, de ce point, on mène des droites aux douze pôles, on obtiendra par l'intersection de ces droites et des trois circonférences A, B, C, les vingt-quatre points de contact des huit cercles tangens aux trois cercles proposés.

Démonstration. Nous pouvons considérer le premier cercle A comme la base d'un cône dont le sommet serait à l'œil, et l'ensemble des cercles B, A d'une part, et C, A de l'autre, comme la perspective de deux autres cônes ayant même limite A (3me lemme), et par conséquent tous deux parallèles au premier. Cherchons la trace du cône parallèle qui les toucherait tous les trois; cette trace est un cercle tangent aux trois proposés. Il est évident que le sommet de ce cône sera un point commun en même temps à la surface des trois autres; il ne s'agit donc que d'obtenir ce point. D'après le 4me lemme, le cône A et le cône B, A ont pour trace de la courbe plane suivant laquelle ils se coupent, la sécante commune entre A et B; il en est de même du cône A et du cône C, A. Enfin, d'après le 5me lemme, il en est de même des cônes C,A et B,A; mais on sait que les sécantes communes de trois cercles passent toutes par un même point; donc les trois plans dont elles sont la trace se coupent suivant une même droite E ayant pour trace

ce point, et pour limite le pôle du cercle A, par rapport à la ligne qui joint les sommets des deux cônes C, A et B, A; car ce pôle est le point d'intersection des limites des trois plans dont les sécantes communes sont les traces. Chacun de ces plans, en effet, a sa limite déterminée par celles des quatre génératrices parallèles, situées dans les plans tangens communs aux deux cônes d'où il provient, c'est-à-dire la corde qui joint les points de contact des tangentes communes sur le cercle A. Si, par le sommet du cône A (par l'œil), et par la ligne E, qui contient évidemment les deux points *a* et *b* communs en même temps aux trois cônes, on fait passer un plan, ce plan contiendra les deux génératrices de contact avec le cône cherché sur le cône A. Mais la trace de ce plan est la ligne E ellemême; donc les deux points où cette ligne rencontre le cercle A appartiennent chacun à la base d'un des cônes tangens aux trois cônes primitifs; donc ce sont les points de tangence que l'on se proposait de déterminer.

Comme, dans cette démonstration, nous eussions aussi bien pu choisir le cercle B que le cercle A, pour représenter le cône auquel les deux autres sont parallèles, et surtout, comme nous n'avons rien particularisé pour les sommets des cônes B, A et C, A, qui peuvent occuper chacun deux positions et donner par conséquent lieu à quatre polaires et à douze pôles, on voit que le problème a huit solutions qui correspondent à vingt-quatre points de tangence.

En opérant séparément pour chaque polaire et les trois pôles qu'elle détermine, on remarque que celle des quatre qui est extérieure aux trois cercles primitifs correspond aux deux cercles tangens, l'un extérieurement et l'autre intérieurement, et que celle des trois autres qui passe entre le cercle C et les cercles A et B correspond aux deux cercles tangens, l'un, intérieurement à A et B, et extérieurement à C; et l'autre tangent intérieurement à C, et extérieurement à A et B; il est facile de conclure le reste. Chaque polaire est sécante réelle ou imaginaire des deux cercles qu'elle produit, comme trace du plan qui passe par les sommets des trois cônes primitifs. Ce plan contient la courbe suivant laquelle les deux cônes tangens cherchés se coupent entre eux, courbe qui, elle-même, a cette polaire pour sécante commune avec chacun des cercles de base des deux cônes tangens auxquels elle appartient.

On pourrait donner une autre démonstration de la construction indiquée dans l'article précédent. Soient, en effet, les trois cercles A, B, C, considérés sur le tableau comme le contour apparent de trois sphères. Il faut, pour cela, supposer l'œil à l'infini; mais les propriétés des pôles et polaires indiquées ci-dessus n'en ont pas moins lieu. La ligne *de* passant par les points de rencontre des tangentes communes extérieures à ces trois cercles, est la trace de deux plans tangens communs aux trois sphères. Les six points de contact de ces deux plans représentés en projection par les trois pôles *a*, *b*, *c*, de *de*, seront deux à deux sur la même perpendiculaire au tableau. On sait (Correspondance de l'École Polytechnique, 1er volume, page 17) que si l'on suppose une quatrième sphère va-

riable de rayon et assujettie à toucher constamment les trois proposées, la succession des points de contact, sur une quelconque de ces dernières, est un cercle perpendiculaire au tableau, et dont le plan passe par l'axe radical des trois sphères.

Or, les points de contact a, b, c des plans tangens mentionnés ci-dessus appartiennent aux courbes de contact de la sphère variable de rayon, puisque chacun de ces plans tangens n'est que le cas de la sphère mobile dont le rayon est devenu infini; de plus, le point o où les trois sécantes communes des cercles A, B, C viennent concourir, est la trace de l'axe radical des trois sphères. Donc les lignes oa, ob, oc, qui joignent le point o aux trois pôles de de sont les trois traces des plans perpendiculaires au tableau, qui donnent sur les sphères A, B, C les courbes de contact d'une sphère mobile de rayon qui toucherait extérieurement les trois proposées.

Si l'on considère une des sphères mobiles, on sait aussi (même ouvrage) que ses trois points de contact déterminent un plan passant par de, et que ce plan coupe la sphère mobile suivant un cercle tangent aux trois cercles suivant lesquels il coupe aussi les sphères A, B, C; le tableau étant un de ces plans, les six points suivant lesquels les droites oa, ob, oc rencontreront les cercles A, B, C, appartiendront, trois à trois, à une des sphères mobiles; donc enfin ils détermineront deux cercles tangens aux cercles A, B, C.

Pour avoir les autres solutions, au lieu de considérer le plan qui touche les trois sphères du même côté, il faut prendre successivement un des six plans qui touchent deux des sphères par une de leurs faces, et qui touchent la troisième par la face opposée.

On a démontré, par l'analyse, que le tracé de la courbe de raccordement de deux alignemens de route, qui consiste à diviser en n parties égales les côtés de l'angle formé par les deux alignemens donnés, et à joindre par des droites, de l'un à l'autre alignement, la division 1 à la division $n-1$, la division 2 à la division $n-2$, etc., déterminait une parabole. Nous allons en donner une démonstration par les considérations polaires.

Soient (fig. 28) CD et DE les deux côtés de l'angle; nous pourrons considérer CD comme la perspective d'une droite C, D, et DE comme celle d'une droite D, E; et si nous prenons ces deux droites pour directrices d'un paraboloïde dont la génératrice serait assujettie à rester constamment parallèle au tableau, quand la perspective de cette génératrice, donnée, dans ses différentes positions, par l'intersection d'un plan parallèle au tableau, aura parcouru la $n^{ième}$ partie de C, D, elle aura également parcouru la $n^{ième}$ partie de D, E: propriété que nous avons reconnue aux plans parallèles au tableau. Mais le tracé de cette droite est précisément la construction ci-dessus indiquée; donc,

toutes les droites ainsi obtenues sont les perspectives des génératrices d'un même paraboloïde ayant le tableau pour plan directeur; donc la courbe qu'elles décrivent, et qui est la perspective du contour apparent de la surface, est une parabole.

Cette démonstration est analogue à celle donnée par M. Vallée dans sa Géométrie descriptive; mais elle n'exige aucune construction auxiliaire: il nous a suffi d'indiquer que la figure était une épure polaire; et la démonstration en est immédiatement résultée.

En général, ayant quatre tangentes à une parabole, pour construire à cette parabole autant d'autres tangentes qu'on désire, on considère deux des côtés opposés du quadrilatère formé par les quatre tangentes données, comme la perspective des deux directrices d'un paraboloïde ayant le tableau pour plan directeur. Par les mêmes considérations que ci-dessus, il est évident que les nouvelles tangentes divisent les directrices en parties de leur longueur respectivement proportionnelles; et comme on peut choisir pour directrices deux quelconques des côtés opposés du quadrilatère, et de plus invertir chaque directrice, on en conclut qu'il existe quatre paraboloïdes qui ont même parabole pour perspective de leur contour apparent, que ces quatre paraboloïdes ont chacun pour trace et pour limite deux des côtés du quadrilatère, et qu'ils se coupent tous les quatre en un point donné par l'intersection des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés. Chacune de ces droites se trouve en même temps sur deux des paraboloïdes. On reconnaîtra sans peine l'analogie qui existe entre ces quatre paraboloïdes et les quatre plans invertis qui ont pour trace et limite les quatre côtés d'un même parallélogramme.

Il résulte, comme corollaire, des propriétés ci-dessus énoncées que si, ayant une tangente à une parabole, on divise cette tangente en parties égales, et que, par chaque point de division, on mène de nouvelles tangentes à la courbe, dans le réseau ainsi formé, chaque tangente nouvelle est divisée en parties égales par son intersection avec toutes les autres.

De la tangente commune à deux courbes du second ordre.

Soient deux courbes du second degré A et B: on peut considérer l'une d'entre elles A, comme la perspective complète d'un cône A, A, dont la trace et la limite se confondraient, et ayant son sommet derrière le tableau, sur la droite qui joint l'œil au centre de A. De plus, les deux courbes A et B peuvent être considérées comme la trace et la limite d'une surface développable B, A, engendrée par le mouvement d'un plan, dont la limite serait constamment tangente à la courbe A, et la trace tangente à la courbe B. Toutes les génératrices de cette surface auront une génératrice parallèle sur le cône, et les plans tangens aux deux surfaces, suivant ces génératrices, seront parallèles comme ayant même limite.

Si, par le sommet du cône A, A, on suppose un plan parallèle au tableau, ce plan,

qui divisera en parties égales les perspectives des génératrices du cône, entre leurs traces et leurs limites, divisera également les génératrices de la surface de la même manière; il sera donc facile d'avoir, par points, la projection E de la courbe de section de ce plan et de la surface, et même de mener des tangentes à chacun des points de cette courbe, car le plan sécant étant parallèle au tableau, son intersection avec le plan tangent passant par la génératrice sur laquelle le point se trouve, est parallèle à la trace du plan tangent lui-même. Si, par le sommet du cône A, A, on mène une tangente *b* à la courbe E, le plan tangent à la surface développable passant par cette droite *b*, sera aussi tangent au cône; sa trace sera donc également tangente aux deux courbes A et B; mais le plan de la courbe B étant parallèle au tableau, la ligne *b* sera parallèle à la trace de tout plan qui la contiendra. Donc, en menant à l'une des deux courbes A et B une tangente parallèle à la ligne *b*, cette tangente sera commune aux deux courbes. Il est à remarquer que la surface développable B, A peut être invertie (nous avons déjà observé que cette propriété est commune à toutes les surfaces engendrées par des lignes droites). La courbe E est une des courbes formant l'intersection commune des deux surfaces inverties; et comme on aurait pu faire le même raisonnement par rapport à la surface invertie A, B et à la courbe B, considérée à son tour comme trace et limite d'un cône, il s'ensuit que les quatre tangentes menées à la courbe E par les centres de B et de A, forment un parallélogramme dont les côtés, pris deux à deux, sont parallèles à deux des tangentes communes de A et de B.

Nous remarquerons qu'il existe deux surfaces développables ayant la courbe B pour trace, et la courbe A pour limite, et que, selon que la courbe E provient de l'une ou de l'autre de ces surfaces, on obtient par son moyen les tangentes communes qui se coupent intérieurement ou extérieurement aux deux proposées.

Quand les courbes A et B sont semblables et semblablement placées, la surface développable qu'elles déterminent devient un cône, et la courbe E étant l'intersection d'un cône par un plan parallèle au tableau, est une courbe de même nature que A et B, semblable et semblablement placée.

Lorsqu'une ligne droite se meut dans un angle droit, de manière à ce que deux points fixes sur cette ligne parcourent chacun, dans son mouvement, un des côtés de l'angle, la courbe décrite par un autre point quelconque de la droite mobile est une ellipse, et le point milieu entre les deux points directeurs décrit un cercle.

La projection polaire fournit une démonstration géométrique de ces propriétés. Supposons, en effet (fig. 29), qu'une des directrices (un des côtés de l'angle droit) AB soit sur le tableau, et que la seconde DC soit la limite d'un plan perpendiculaire à AB. Ces seules données nous indiquent que la génératrice mobile, que nous pourrons alors considérer comme la perspective d'une succession de droites ayant leur trace sur AB et leur limite sur CD, appartient à un conoïde ayant CD pour

plan directeur et AB pour trace. Si nous pouvons indiquer sur cette surface une courbe connue, elle sera entièrement déterminée, ses génératrices étant assujetties à passer par cette courbe, à toucher la droite AB, et à être parallèles au plan CD.

Supposons que nous ayons tracé en un point quelconque du tableau un cercle ayant pour rayon la grandeur constante de la droite mobile; ce cercle pourra être considéré comme la limite d'un cône dont le sommet serait sur le tableau au centre même du cercle; les perspectives de ses génératrices seront, par construction, égales en longueur à celles des génératrices du conoïde; et en prenant à volonté une de ces dernières, on pourra toujours trouver une génératrice du cône dont la perspective lui sera parallèle. En considérant à part un de ces couples, on reconnaît que les droites qu'ils représentent sont dans un même plan, puisque la ligne qui joint leurs traces serait parallèle à celle qui joint leurs limites, et, de plus, que ces droites se rencontrent sur un plan parallèle au tableau passant par l'œil, comme ayant leurs perspectives parallèles. Les deux surfaces auront donc, sur ce plan, une courbe commune. Or, le plan parallèle au tableau coupe le cône suivant un cercle; donc le conoïde dont nous nous occupons a pour directrice une droite sur le tableau, et un cercle situé sur un plan parallèle au tableau passant par l'œil. En se rappelant qu'un plan quelconque parallèle au tableau doit diviser les perspectives des génératrices de cette surface en parties proportionnelles, on reconnaît que tout point de la droite mobile décrit une ellipse; car cette surface est coupée, suivant des ellipses, par des plans parallèles au tableau. Il reste encore à prouver que le plan déterminé par les points milieux des génératrices, donne un cercle. Or, ce plan est situé, par rapport au tableau, à une distance égale à celle qui existe entre le tableau et le cercle directeur. Le conoïde dont la directrice est perpendiculaire au plan directeur, étant composé de deux nappes égales, ces deux plans également distans de la directrice, coupent la surface suivant deux courbes égales; donc, etc.

Si l'on invertit la surface, les deux conoïdes invertis se coupent suivant le cercle qui est le lieu des centres de leurs génératrices communes.

Si, dans la figure 29, l'angle des droites AB et CD n'était pas droit, la directrice du conoïde ne serait pas perpendiculaire au plan directeur, et la surface ne serait plus composée de deux nappes égales; elle contiendrait bien encore un cercle situé dans un plan parallèle au tableau passant par l'œil, mais son intersection par un autre plan parallèle et situé derrière le tableau à une même distance de la directrice, serait une ellipse.

CHAPITRE III.

Méthode pour mettre en perspective un corps de forme connue.

Lorsqu'on a à mettre en projection orthogonale un corps de dimensions connues, un édifice, par exemple, on commence par rassembler sur un croquis toutes les dimensions, soit angulaires, soit linéaires, qui constituent sa forme générale, ainsi que celle de tous ses détails ; et c'est d'après ce croquis que le dessinateur opérant avec la règle et le compas, selon les principes de la Géométrie descriptive, donne à la projection de l'édifice la forme exacte qui résulte de la grandeur relative de ses parties et de sa position dans l'espace, par rapport au plan sur lequel il dessine. Quelquefois, au lieu d'un croquis, le dessinateur ne possède qu'une légende; et, pourvu qu'elle soit suffisamment détaillée, il parvient également à son but. Quelquefois enfin il compose : son imagination lui fournit alors les formes de l'objet à décrire, et il réalise ces formes en projection sur le papier. Toutes ces suppositions dérivent du même problème : *Un corps étant connu de position et de forme, tracer sa projection.* Ce problème se résout, en projection polaire, aussi facilement qu'en projection orthogonale, et se prête aux mêmes modifications; on peut mettre en perspective un corps dont on ne possède qu'un croquis côté ou une légende, et l'on peut aussi établir immédiatement la projection polaire d'un corps qui n'existerait que dans l'imagination du dessinateur, c'est-à-dire composer en perspective. Nous allons consacrer ce chapitre à développer la méthode à suivre pour cela, et nous terminerons par quelques exemples.

La projection polaire ne supposant connu, *à priori,* dans l'espace, que l'œil et le tableau, on ne peut se donner la position des divers corps que l'on veut projeter que par les relations de position qu'ils peuvent avoir avec ce plan et ce point. Ordinairement on choisit comme donnée principale, dans ces corps, une droite ou un plan dont on se donne la position; et c'est autour d'eux qu'on groupe toutes les

autres parties, par leur relation connue avec cette droite ou ce plan. Nous allons donc avant tout indiquer le moyen de déterminer la position d'une droite ou d'un plan, par rapport à l'œil et au tableau.

Une droite peut être donnée par la grandeur de l'angle qu'elle fait avec le tableau ; cette condition indique que sa limite est sur la trace d'un cône droit à base circulaire, ayant pour sommet l'œil, et pour angle générateur le supplément de l'angle donné.

En se donnant aussi la plus courte distance de cette ligne et de l'axe perspectif (nous avons appelé axe perspectif la droite qui joint l'œil au point de vue), et l'éloignement du tableau où se trouve cette plus courte distance, la ligne sera suffisamment déterminée pour servir de ligne principale.

Il est évident, en effet, que toutes les lignes qui satisferont aux conditions ci-dessus appartiennent à un hyperboloïde de révolution, ayant pour axe l'axe perspectif lui-même, et pour cercle de gorge le cercle décrit autour de l'axe avec la plus courte distance pour rayon. Toutes les lignes de cet hyperboloïde seront symétriquement placées par rapport au tableau : en faisant tourner la figure autour de l'axe perspectif, on amènera successivement chacune d'elles à occuper la même position par rapport au spectateur. Quelle que soit donc celle de ces lignes qu'on aura choisie, la perspective du corps groupé autour pourra, par un simple mouvement de rotation du tableau, être ramenée à occuper une place déterminée ; il est donc tout-à-fait indifférent de prendre une quelconque de ces lignes pour ligne principale (1).

Si c'est autour d'un plan que l'on veut construire la projection d'un corps, la position de ce plan principal sera donnée, 1° par l'angle qu'il doit faire avec le tableau ; 2° par le point où il doit couper l'axe perspectif.

---

(1) La méthode orthogonale présente une semblable indécision. On peut, en effet, faire marcher une épure parallèlement à la ligne de terre, sans rien changer dans les projections du corps qu'elle représente. La projection polaire sur un plan permet également de prendre à volonté la ligne à partir de laquelle on compte les angles des rayons vecteurs.

29me PROBLÈME.

Trouver les lignes projectives d'un plan qui ferait avec le tableau un angle abc (fig. 30), *et qui rencontrerait l'axe perspectif à une distance* gh *du point de vue.*

Solution. Soit le cercle dont le rayon est OO′ donné pour cercle de rabattement de l'œil; si d'un point quelconque O′ de ce cercle, où nous supposerons l'œil rabattu, nous menons une droite O′R faisant avec le rayon un angle RO′O supplément de l'angle donné, le point R, où cette droite viendra rencontrer la charnière de rabattement, appartiendra à la base d'un cône droit ayant son sommet à l'œil, et dont toutes les génératrices feront avec le tableau l'angle *abc* donné; les tangentes à ce cercle seront donc les limites de tous les plans qui font le même angle avec le tableau. Choisissons une quelconque DE de ces tangentes pour limite du plan cherché, et menons dans ce plan une droite DO assujettie à rencontrer l'axe perspectif au point où cet axe doit être coupé par le plan : cette droite n'est encore connue que par sa limite et sa direction; il s'agit d'avoir sa trace.

Supposons une droite quelconque H, O perpendiculaire au tableau, et portons sur cette droite la distance HL égale à *gh*, par le procédé du 2me problème; le point P sera, sur cette droite, à une même distance du tableau que le point où l'axe perspectif est rencontré par le plan cherché. Nous pouvons donc considérer ces deux points comme situés sur un plan parallèle au tableau, et nous savons qu'un pareil plan coupe les perspectives de deux droites en parties proportionnelles; donc le point O doit diviser la droite dont nous cherchons la trace, comme le point P divise la droite H, O. Cette relation nous fournira le point C, trace de la ligne C, D; faisant passer par ce point une parallèle à DE, le plan MN, DE sera le plan cherché. Il est évident que chaque tangente au cercle ayant OR pour rayon eût donné un plan différent, et que tous ces plans appartiennent à un cône droit ayant son sommet au point où l'axe perspectif est rencontré par eux. Il en est de ces plans comme des lignes de l'hyperboloïde indiqué ci-dessus; le choix entre eux est indifférent, parce que les épures de perspectives n'ont pas de sens, et peuvent tourner autour de l'axe

perspectif. Quel que soit en effet celui de ces plans que l'on choisisse pour projeter un corps dont il serait le plan principal, il en résultera une figure égale et symétriquement placée autour du point de vue.

Si l'on connaissait d'avance, sur le tableau, la direction de la pesanteur, c'est-à-dire la limite des plans horizontaux, cette incertitude cesserait par la relation que l'on pourrait se donner entre le plan principal et la verticale.

La solution de ce problème nous dispensera, dans les épures d'application suivantes, de construire le plan principal par de semblables données; nous serons toujours censés l'avoir fait d'avance, et nous en omettrons le tracé, qui compliquerait la figure sans utilité.

On choisit souvent le plan ou la ligne principaux perpendiculaires au tableau, alors l'hyperboloïde, lieu de toutes les droites, ainsi que le cône, enveloppe de tous les plans principaux assujettis aux mêmes conditions, se réduisent à un cylindre perpendiculaire au tableau dont l'axe se confond avec l'axe perspectif, et dont il suffit d'avoir le rayon du cercle de base pour pouvoir lui mener un plan tangent, ou construire une de ses génératrices.

Ayant déterminé un plan en projection polaire par ses relations de position avec le tableau, l'œil et l'axe perspectif, on pourra tracer sur ce plan une figure quelconque : on n'aura, pour cela, qu'à rabattre le plan sur le tableau, tracer en rabattement la figure donnée, et la remettre ensuite en perspective par points, en employant la construction inverse du 15me problème, qui consiste à abaisser des ordonnées perpendiculaires sur la charnière, et à mettre ensuite ces perpendiculaires en perspective avec les points de la figure d'où elles proviennent. Telle est la méthode générale pour mettre en perspective une figure plane quelconque sur un plan connu de position.

PREMIÈRE ÉPURE D'APPLICATION.

Construire la perspective d'un cube ayant pour côté la grandeur cd (fig. 31), *placé sur la face vue d'un plan* AC, BI, *et tel qu'une de ses arètes les plus rapprochées de l'œil sur ce plan coïncide avec la ligne* A, B *à une distance* ab *du point où cette ligne perce le tableau.*

Construction. Soit le cercle dont le centre est en O, et le rayon OL pris pour cercle de rabattement de l'œil, en portant sur la ligne A, B,

par les procédés du 3me problème, les deux grandeurs *ab* et *cd*, la première de A en E, la seconde de E en F; EF sera une des arètes du cube cherché. Nous pourrons également trouver les trois limites des six plans qui forment ses faces : l'une est BI, limite du plan sur lequel le cube est placé; l'autre doit être PI, normale du point B, puisque chaque arète aboutit à deux faces qui lui sont perpendiculaires. La troisième, enfin, est PB normale, du point d'intersection I des deux autres limites; les trois points I, P, B seront les limites des trois faisceaux d'arètes du cube. Joignant donc les points E et F aux points P et I; PF, PE, IF et IE seront quatre nouvelles arètes du cube, sur chacune desquelles nous aurons à porter la grandeur EF déjà trouvée. Nous y parviendrons en cherchant dans le plan qui contient A, B et PE, la limite des diagonales de la face du cube que ce plan détermine. Il suffit, pour cela, de rabattre le plan PB sur le tableau; l'œil vient s'appliquer en N; les droites NP et NB sont, en rabattement, les parallèles aux deux arètes A, B et PE, et le point M, où la ligne qui divise en deux l'angle droit qu'elles forment vient rencontrer la charnière, est la limite des diagonales cherchées. Joignant cette limite au point F, la diagonale MF prolongée déterminera sur PE une grandeur ES égale à EF; dès lors, en joignant le point S aux limites B et I, on a deux nouvelles arètes du cube, et une de ses faces complète EFSR. Le point R étant donné par la rencontre de BS et de PF, on peut joindre également ce point à la limite I; cela fait, au moyen de la diagonale N'S, fournie par une construction analogue à celle qui a donné MS, on déterminera, sur RI, une nouvelle arète du cube RT, qui permet d'achever sa construction, puisque, par les arètes TB et SI, une nouvelle face RTVS étant déterminée, il n'y a plus qu'à joindre les angles T et V à la limite P: la douzième arète résulte de l'intersection de VP avec EI, comme aussi de celle de TP avec FI.

Pour achever l'épure, on n'a qu'à remarquer que les quatre arètes situées dans le plan AC, BI ont leurs traces sur celle de ce plan, et que ces traces déterminent un point de la trace de quatre autres plans auxquels elles appartiennent, plans dont les traces sont parallèles deux à deux à l'une des limites PB et PI; et, enfin, que les quatre traces des plans ainsi obtenus contiennent, à leur tour, les traces des quatre arètes de la face TVSR.

Non-seulement on trouve, dans cette épure, le cube cherché, mais, après avoir construit les traces des six plans qui le composent, on peut reconnaître comment chacun de ces plans concourt à le former. On y voit les trois prismes quadrangulaires résultant du prolongement des six faces; ils s'étendent depuis leurs traces sur le tableau jusqu'à leurs limites, c'est-à-dire à l'infini; on y reconnaît les angles trièdres opposés aux sommets des huit angles solides du cube, et les angles dièdres opposés aux douze arêtes. Aussi, rien de plus complet que l'image qu'elle présente; elle peut servir à confirmer ce que nous avions annoncé de l'élégance et de la clarté de la nouvelle méthode descriptive : autant ce dessin est simple à exécuter et facile à concevoir, autant la même épure en projection orthogonale serait pénible à construire et difficile à analyser.

2me ÉPURE D'APPLICATION.

Trouver (fig. 33, planche 7me), *le contour apparent d'une sphère d'un rayon égal à* 1, *et qui toucherait le plan* AB, EF *en un point* o.

Construction. Soit donné pour cercle de rabattement de l'œil celui dont le diamètre est EF.

En élevant par le point *o* une perpendiculaire *oc* au plan AB, EF, elle doit contenir le centre cherché; et pour trouver ce centre, il n'y a qu'à porter sur cette perpendiculaire, à partir du point *o*, une grandeur égale au rayon de la sphère. On y parvient en faisant passer par cette droite un plan *ab*, GM perpendiculaire au tableau. Dans ce plan, les deux droites *ao* et *bc* perpendiculaires au tableau, et dont l'une contient le point *o*, interceptent entre elles une grandeur *ab* égale au rayon donné; donc, la droite *bc* passe par le centre de la sphère. Si l'on rabat le plan projetant de cette droite sur le tableau, le centre *c* de la sphère se rabat en *d*; nous pourrons donc tracer le grand cercle rabattu, et lui mener par l'œil en rabattement les deux tangentes *ge* et *hf*, qui donneront sur la charnière, en *g* et en *h*, deux points du contour apparent. Ces points seront les extrémités du grand axe de l'ellipse, suivant laquelle se projette le cercle contour apparent de la sphère; donc, si l'on joint son milieu *n* à l'œil, on aura la ligne projetante du centre de la corde qui se

projette suivant le petit axe. Cette corde appartient au cercle contour apparent, dont le rabattement nous donne en ef le diamètre; on peut donc en construisant ce cercle obtenir cette corde $a\delta$ en véritable grandeur; et il ne s'agit plus que de rapporter cette grandeur en perspective. Nous y parviendrons au moyen des lignes projectives du plan du contour apparent. Le point k appartient à la ligne ef, qui se trouve dans ce plan: ce point est sur la charnière de rabattement; donc c'est un point de la trace du plan cherché. Nous savons, de plus, que ce plan est perpendiculaire à la ligne qui joint l'œil au centre de la sphère; donc la limite de ce plan est normale du point e, où se projette ce centre: sa trace kp est parallèle à cette normale. Ayant ainsi obtenu la trace du plan du contour apparent, au moyen des deux parallèles kc et lm, nous porterons en nm la grandeur kl du demi petit axe. Cela fait, on pourra tracer l'ellipse cherchée.

Si l'on voulait construire cette ellipse par points, il faudrait faire passer par l'œil et par le centre de la sphère une suite de plans, rabattre ces plans sur le tableau, et opérer sur eux comme nous l'avons fait pour le plan projetant de bc.

3me ÉPURE D'APPLICATION.

Trouver la perspective d'une surface annulaire engendrée par le mouvement d'un cercle dont le rayon serait égal à I (planche 6me), *qui tournerait autour d'un axe parallèle au tableau, et qui aurait son centre à une distance* II *de cet axe; l'axe lui-même situé à une distance* III *du tableau et ayant pour plus courte distance avec l'axe perspectif la grandeur* IV. *Enfin, le centre de la surface situé sur son axe à une distance* V *du point où cet axe serait rencontré par un plan mené par l'œil perpendiculairement à sa direction.*

Soit donné pour cercle de rabattement de l'œil celui dont le rayon est OR.

Construction: D'après ce que nous avons exposé au commencement du chapitre, nous pouvons choisir à volonté sur le tableau la direction de l'axe de la surface. Menons par le point de vue O une parallèle OO′ à cette direction: ce sera la limite du plan perpendiculaire au tableau

qui contient l'axe. Élevons par le point de vue une perpendiculaire OR à OO′ : ce sera la trace d'un plan passant par l'œil perpendiculaire à l'axe. Si, sur cette perpendiculaire, à partir du point O, nous portons de O en A la grandeur IV, le point A appartiendra à la trace du plan perpendiculaire au tableau qui contient l'axe; ce plan AB, OO′ sera donc déterminé. Si, par un point *b* de la trace de ce plan, nous menons une perpendiculaire *b*, *o* au tableau, et qu'à partir de cé point nous portions de *b* en *a*, par les procédés connus, une grandeur *bc* égale à III, le point *a* appartiendra à l'axe de la surface, dont nous pourrons, par conséquent, tracer la perspective D*a*. Enfin, si sur la trace du plan AB, OO′, à partir du point A, nous portons de A en C la grandeur V, et que par C nous menions un plan perpendiculaire au tableau, et à l'axe; le point D où ce plan vient rencontrer l'axe sera le centre cherché de la surface, puisque la distance du plan qui passe par D et du plan AO qui lui est parallèle et qui passe par l'œil, est mesurée par la grandeur AC.

Ayant le centre de la surface, nous pourrons construire la projection des deux cercles méridiens parallèles au tableau. En effet, si, par le centre de la surface, nous menons parallèlement au tableau une perpendiculaire à l'axe, cette ligne DF, passe par le centre des cercles méridiens cherchés; et il n'y aura pour trouver ces centres qu'à porter à droite et à gauche du point D la grandeur II. La ligne DF est dans le plan CD′, OA; donc, en portant II de C en G, et menant par G une ligne au point de concours O de CD, cette ligne déterminera en E le centre d'un des cercles. En portant sur le prolongement de DE, la grandeur I, nous obtiendrons, par une construction semblable, la perspective EF du rayon du cercle cherché; et comme ce cercle se projette parallèlement à lui-même, nous n'avons qu'à décrire du point E un cercle avec EF pour rayon : un cercle égal et semblablement placé de l'autre côté de l'axe, complètera la perspective des deux cercles méridiens parallèles au tableau.

Ces données arrêtées, conformément aux conditions auxquelles la surface devait satisfaire, nous allons en déduire la perspective de son contour apparent.

Si, par un point quelconque I de l'axe, nous menons un plan qui lui soit perpendiculaire, l'intersection de ce plan avec le méridien

parallèle au tableau sera la droite NIK, et la trace TS de ce plan, parallèle à cette droite, s'obtiendra en abaissant du point I une perpendiculaire au tableau S, O. Ce plan coupe la surface suivant deux cercles ayant le point I pour perspective de leur centre commun. IL et IN sont les perspectives de leurs rayons situés dans le plan méridien parallèle au tableau.

Si nous considérons le cône tangent à la surface suivant un de ces cercles, le plus grand, par exemple, ce cône, qui a son sommet sur l'axe, sera coupé par le plan méridien suivant deux génératrices nécessairement tangentes chacune à un des cercles méridiens ; donc la tangente KM sera une génératrice de ce cône, et déterminera son sommet au point M où elle vient rencontrer l'axe. Ce cône ayant tous ses plans tangens communs avec la surface, il s'ensuit que les deux plans qui déterminent son contour apparent appartiennent aussi au contour apparent de la surface ; donc les traces de ces deux plans seront tangentes à la perspective du contour apparent de la surface, au point où ces traces touchent la perspective du cercle de contact avec le cône. Donc, si nous cherchons sur ce cercle les points qui appartiennent au contour apparent du cône, nous obtiendrons deux points du contour apparent de la surface, et les génératrices du cône qui passent par ces mêmes points seront tangentes à cette dernière courbe.

Le cercle de contact des deux surfaces se projette suivant une ellipse que l'on pourrait tracer par points, et à laquelle on mènerait des tangentes par le point M ; mais ce procédé est trop sujet à erreur, surtout pour la branche intérieure du contour apparent. Nous avons tracé sur l'épure la construction que l'on peut employer pour mener deux tangentes au cercle de contact, par le point où la ligne projetante du sommet M vient rencontrer le plan de ce cercle, tangentes dont la perspective se confond avec la trace des plans cherchés, puisqu'elles font partie de ces plans.

La ligne OS sera un des diamètres de l'ellipse projection du cercle de contact ; et pour avoir les extrémités de ce diamètre, il suffit de porter sur cette ligne, à partir du centre I, la grandeur du rayon IN du cercle que cette ellipse représente : ce qui s'obtient en joignant les points K et N au point R ; car les triangles IKQ et P'IN, tous deux rectangles en I, ont leur hypoténuse qui fait un angle de 45° avec le ta-

bleau, et par conséquent avec la droite NK. Si, sur ce diamètre, on construit un cercle P'YQ, ce cercle et l'ellipse auront P'Q pour sécante commune, et pourront être considérés comme la perspective de deux courbes situées sur un cylindre parallèle au tableau; car leurs tangentes communes seront parallèles.

Tout plan parallèle au tableau coupera les plans de ces deux courbes suivant des droites parallèles à UI et IN, intersection du méridien parallèle au tableau, et des plans des deux courbes. Projetant le point M sur le plan du cercle P'YQ, par une droite parallèle aux génératrices du cylindre qui contient les deux courbes, un plan parallèle au tableau contenant cette droite, coupera le plan de l'ellipse selon MV parallèle à IN et le plan du cercle selon VX parallèle à UI; le point projeté doit être sur une ligne passant par M et parallèle aux arêtes du cylindre, c'est-à-dire à la direction UN. Si du point X, ainsi déterminé, nous menons deux tangentes au cercle XZ et XY', nous n'aurons plus qu'à ramener ces tangentes et leurs points de contact sur le plan de l'ellipse, par le procédé inverse à celui que nous venons d'employer pour projeter le point M; ce qui s'obtient en abaissant du point Y une parallèle à UI jusqu'au point W, où elle rencontre la sécante commune, en menant de ce point une parallèle WY' à NI, et observant que la ligne qui joint U à N doit également être parallèle à celle qui joint Y à Y'; ce point Y' appartiendra au contour apparent, et la droite qui le joint au point M sera tangente en ce point à cette courbe: il en est de même du point Z' et de la droite MZ'. Ces deux points appartiennent au contour apparent extérieur de la surface; on aurait obtenu deux points du contour apparent intérieur en menant au cercle de contact dont le rayon est IL, deux tangentes par le point où la tangente en L au cercle méridien vient rencontrer l'axe. On remarquera que la droite MZ' coupe la sécante commune P'Q au même point M' où la tangente au cercle P'YQ la rencontre aussi; car ce point, dans la projection réciproque de ces droites, appartenant aux plans des deux courbes, ne varie pas. Il en est de même des deux tangentes XY et MY'.

On peut, par un procédé analogue, trouver autant d'autres points et d'autres tangentes qu'on le désire, tant pour la branche extérieure du contour apparent, que pour la branche intérieure. On remarquera

que cette dernière a quatre points singuliers : ce sont ceux pour lesquels les tangentes à cette courbe à double courbure, viennent dans l'espace aboutir à l'œil. Ces points divisent le contour apparent intérieur en quatre parties : deux pour lesquelles la surface est vue extérieurement, et deux autres plus petites pour lesquelles on la verrait intérieurement si son enveloppe antérieure était transparente.

Au lieu de la construction précédente, on aurait pu rabattre sur le plan méridien parallèle au tableau le cercle de contact de la sphère et du cône autour de son diamètre NK, ainsi que le point où la droite projetante de M perce le plan de ce cercle; et, après avoir mené en rabattement, par ce point, des tangentes au cercle, remettre ces tangentes et leurs points de contact en perspective. Ce procédé de construction démontre que les deux cercles méridiens parallèles au tableau touchent le contour apparent en quatre points dont les tangentes en perspective vont passer par le point de vue.

4me ÉPURE D'APPLICATION.

Tracer la perspective d'une vis à filet triangulaire dont l'axe serait parallèle au tableau, et couperait l'axe perspectif à une distance I *du point de vue,* (planche 7me). *On donne pour angle du triangle générateur de la vis, celui de* 60°; *pour hauteur du pas de vis, la grandeur.* III; *pour rayon du cercle de base de l'hélice saillante, la grandeur* II; *et l'on suppose que la vis est debout sur un plan horizontal* AB, EF.

Soit donné pour cercle de rabattement de l'œil celui dont EF est le diamètre.

Construction. La surface de la vis étant réglée, a une courbe limite donnée par les traces d'une suite de droites parallèles à ses génératrices, qui passeraient par l'œil. Il est évident que ces parallèles déterminent un cône dont le sommet est à l'œil, et dont l'angle au centre est le double de celui des filets. La trace du cône est donc la limite de la surface. Pour obtenir cette trace, il suffit de rabattre l'œil autour du plan MD' qui est le plan projetant de l'axe de la vis, puisque la perspective de cet axe doit passer par le point de vue et être perpendiculaire à la limite EF. L'œil rabattu vient en E, et la ligne EM faisant avec MD' l'angle de 60°, est une génératrice du cône; donc le point M ap-

partient à la trace de ce cône, et comme cette trace est évidemment une hyperbole M'M'M''S, etc., ayant pour centre le point de vue, et pour asymptotes des droites faisant avec la direction de l'axe des angles de 60°, on pourra la construire par points.

On cherchera ensuite la section du cylindre sur lequel se trouve l'hélice saillante de la vis avec le plan AB, EF: pour ne pas trop charger la figure, nous avons donné cette section sur le plan A'B', EF parallèle au précédent, et distant d'une grandeur BB' égale à la hauteur du pas de vis.

L'axe rencontre sur ce plan la ligne qui a sa trace en D', et sa limite au point de vue, à une distance égale à I; portant cette grandeur de D' en B', et joignant le point B' à E, nous aurons formé sur le plan un triangle CD'B' isocèle rectangle, dans lequel D'C sera égal à D'B'; donc C sera le point où l'axe de la vis percera le plan A'B', EF. Menant par ce point, dans ce plan, une droite IH parallèle au tableau, et portant sur cette parallèle une grandeur DB' égale au rayon du cercle de base du cylindre au moyen des deux parallèles B'E et DE, nous aurons en G, en I, et par conséquent en H, des points de la courbe. En portant la grandeur CH sur CL par la ligne LH qui détermine le triangle isocèle LCH, ligne dont le point limite s'obtient par les procédés du 3me problème, nous avons un autre point L, et par suite le point L', etc. Nous pourrons alors élever par I, L', G, L, H, G', etc., des génératrices du cylindre, et trouver le point où chacune de ces génératrices perce le plan AB, EF; puisqu'il suffira pour cela, comme nous l'avons fait pour l'axe C, et les génératrices L et L', de porter sur ces lignes une grandeur égale à BB', ou à AA'. Nous trouverons ainsi que O est le point de rencontre de l'axe avec le plan AB, EF, et L'' le point de rencontre de la génératrice qui passe par L'.

Supposons maintenant que l'hélice saillante commence au point où la génératrice du cylindre, passant par H, perce le plan AB, EF. Pour avoir un point T de cette hélice sur la génératrice L'L'', il faut savoir de combien l'hélice s'est élevée dans l'intervalle de ces deux génératrices; or, les points I, L', G, L et H divisent le demi-cercle sur lequel ils se trouvent en quatre parties égales; car toutes les droites qui aboutissent de ces points au centre forment, deux à

deux, des angles de 45° : donc l'hélice a dû s'élever, de H' en L', des trois huitièmes du pas de vis. Or, AA' est égal à ce pas de vis; divisant AA' en huit parties, rapportant ces grandeurs en perspective sur L'L" par des parallèles, et portant trois de ces parties de L" en T, le point T appartiendra à l'hélice. Nous trouverions ainsi les autres points de la première révolution de l'hélice. Cela fait, le point N, par exemple, s'obtient en portant deux fois le pas de vis L'L" de T en N. Ce pas de vis change de grandeur en perspective pour toutes les génératrices. Ainsi, pour la génératrice GM, il est donné sur la droite qui passe par G"; pour l'axe, et par conséquent pour les génératrices I et H, il est donné par la grandeur OG, etc.

En divisant GG' en deux parties égales, on a un point du grand axe de l'ellipse GHG'I, les génératrices élevées par ses extrémités forment le contour apparent du cylindre sur lequel l'hélice saillante est tracée, et, par conséquent, les tangentes extrêmes qui limitent la perspective de cette hélice.

Cherchons maintenant une des génératrices de la surface rampante, celle, par exemple, qui aboutit au point T; cette génératrice sera donnée par le plan méridien qui passe par ce point. Or, ce plan qui coupe le cylindre suivant L'N, et qui passe par l'axe, a pour trace AA' et pour limite FM'; donc M' sera la limite de la génératrice cherchée, puisque c'est le point où la limite du plan rencontre la limite de la surface. En joignant ce point à T et prolongeant jusqu'à la trace AA' du plan, Q sera la trace de cette génératrice. La limite M'F du plan rencontre l'hyperbole en un second point qui appartient à la génératrice de la surface inférieure, qui passe également par T. Nous pourrons trouver par un procédé semblable autant de génératrices que nous voudrons sur l'une et l'autre surface; celles qui sont dans le même plan méridien et dans deux nappes en regard donneront, par leur intersection, un point de l'hélice creuse de la vis. Ainsi, dans le plan BB', M"S l'intersection des génératrices qui passent par les points 5 et 6, et qui ont, l'une sa limite en M", et l'autre en S, fournira un point 7 de l'hélice creuse. On pourra donc construire aussi cette hélice; cela fait, il ne restera plus qu'à trouver le contour apparent des deux surfaces inférieure et supérieure, contour qui est, en perspective, la courbe enveloppe de l'en-

semble des génératrices. Ce contour apparent doit être tangent aussi bien à l'hélice saillante qu'à l'hélice creuse.

Nous avons supposé cette vis terminée par une tête octogonale; mais nous n'en discuterons pas le tracé; nous nous contenterons d'indiquer que le diamètre du cercle inscrit à son polygone de base, est égal à la grandeur 9,10, et que la trace de son plan inférieur parallèle au plan AB, EF, passe par le point W.

Il nous reste à faire voir comment nous avons obtenu l'intersection de la surface avec le plan inférieur de la tête; cette courbe est l'intersection de ce plan avec la succession des génératrices de la surface; ainsi la génératrice YX, qui provient du plan méridien BB', ES, est coupée par le plan inférieur de la tête au point X, point où la ligne ZX, commune intersection du plan méridien et du plan inférieur, vient la rencontrer. On construira de même l'intersection de la vis avec le plan AB, EF.

Nous ferons observer, en terminant, que les génératrices des deux surfaces rampantes, données par le plan méridien parallèle au tableau, qui passe par le diamètre IH, font en perspective avec l'axe des angles égaux à ceux que ces mêmes droites forment dans l'espace, et que, par conséquent, on peut tracer ces génératrices, en ayant un seul de leurs points, quoiqu'on ne puisse pas avoir leurs limites ni leurs traces, qui sont à l'infini.

Après avoir fait connaître comment les principes de la projection polaire peuvent servir à mettre en perspective les corps qui ont une génération géométrique, il nous reste à indiquer sommairement les procédés à suivre pour mettre en perspective les corps de figure irrégulière, mais dont les formes peuvent être approximativement connues.

Un premier moyen est de supposer que ces corps enveloppent un squelette composé de lignes droites de grandeur et de direction connues. Ce procédé trouve son application lorsque l'on a à peindre une académie en raccourci, aboutissant, par quelques-unes de ses extrémités, à des points dont le spectateur peut apprécier la distance par les données mêmes du tableau dont elle fait partie.

Un second moyen est de supposer le corps que l'on considère coupé par des plans parallèles équidistans; et comme, si la forme du corps est bien connue, ces sections peuvent être obtenues en véritable grandeur avec assez d'exactitude, elles pourront de même être mises chacune en perspective. Dès lors le contour apparent extérieur du corps entier, sera une courbe tangente à toutes les sections mises en perspective. On obtiendra également par ce procédé les contours apparens accidentels, ce qui aura lieu toutes les fois que les projections de deux sections successives, se couperont intérieurement et permettront, par conséquent, de leur mener des tangentes communes, autres que celles du contour extérieur.

Ce second moyen est un des procédés descriptifs employés en topographie, et l'on sent que toutes les ressources qu'il présente pour opérer sur des corps de forme irrégulière sont applicables à la description polaire.

Lorsqu'un architecte se sera rendu compte géométriquement du terrain sur lequel un monument doit être élevé; quand il sera prêt à en dresser la carte, par le procédé des courbes de niveau et de plus grande pente, il pourra, par le moyen indiqué ci-dessus, mettre ce terrain en perspective et y placer en perspective l'édifice projeté. Il y a de l'avantage, dans une infinité de circonstances, à pouvoir ainsi se rendre compte d'avance de l'effet que produira un monument comparé à l'aspect du terrain sur lequel il doit être assis, et à celui de tous les objets dont il doit être entouré. Cette étude préliminaire est même indispensable toutes les fois qu'il s'agit de placer un édifice de quelque importance sur un point culminant.

CHAPITRE IV.

Application de la théorie des ombres aux épures de projection polaires.

Les questions que l'on a à résoudre, quand on considère les corps par rapport à la lumière dont ils sont éclairés, se réduisent à quatre principales : 1° distinguer les parties ombrées et les parties éclairées d'un corps soumis à l'influence d'un point lumineux connu de position ; 2° tracer sur ce corps la ligne qui sépare la partie ombrée de la partie éclairée ; 3° dans la supposition où le corps serait exactement poli, déterminer sur sa surface les points qui renverraient à l'œil l'image du point lumineux ; 4° enfin, trouver les parties de l'espace que le corps, par son interposition, prive de la lumière directe.

Nous allons résoudre la première de ces questions par rapport au plan, et il nous sera ensuite facile d'étendre aux corps de toute nature ce que nous aurons établi pour l'élément de toutes les surfaces. Soit (fig. 30) MN, DE un plan donné, et soit le point S perspective réelle d'un point lumineux situé à l'infini (1) ; si, parmi tous les plans parallèles au proposé, et qui présentent leurs faces semblablement placées au point lumineux, nous considérons celui qui passe par l'œil, il est évident que sa face *de* sera éclairée, et que sa face DE sera dans l'ombre. Ceux des plans parallèles à DE qui auront leur trace du même côté de la limite commune où se trouve le point lumineux, présenteront à l'œil leur face DE, c'est-à-dire leur face obscure ; et ceux, au contraire, dont la trace sera

(1) Un point en projection polaire n'indique que la direction d'une ligne passant par l'œil ; cette ligne, prolongée à l'infini, a deux extrémités à chacune desquelles le point lumineux peut être placé ; celle de ses extrémités qui est derrière le tableau s'y projette en perspective réelle, l'autre en perspective imaginaire.

du côté opposé au point lumineux, présenteront à l'œil leur face de, c'est-à-dire leur face éclairée. Le plan MN, DE présente donc à l'œil sa face éclairée, et le plan AB, DE présente sa face obscure. L'inverse aurait lieu, si la perspective du point lumineux, au lieu d'être réelle, était imaginaire.

Quand un corps sera terminé par des surfaces planes, on pourra, par les règles que nous venons d'établir, connaissant la perspective du point lumineux, distinguer celles de ses faces qui seront éclairées de celles qui seront dans l'ombre; quand le corps sera terminé par des surfaces courbes, en appliquant ces mêmes règles au plan tangent à un point quelconque de la surface, on saura si ce point est éclairé ou non.

La seconde question est facile à résoudre quand il s'agit d'un corps terminé par des plans. La ligne de séparation d'ombre et de lumière est alors une succession d'arêtes qui, chacune, séparent une face éclairée d'une face obscure. Dans le cas d'un corps terminé par des surfaces courbes, c'est ou la courbe de contact d'un cylindre engendré par le mouvement d'un plan tangent qui tournerait autour du corps sans cesser d'être parallèle au rayon lumineux, ou l'arête d'intersection d'une surface obscure par une surface éclairée.

Dans la figure 25, en supposant la limite des rayons lumineux au point R, la courbe GHH'A est la séparation d'ombre et de lumière sur la surface du second ordre non réglée que cette épure représente; car cette courbe est celle de contact d'un cylindre tangent à cette surface, et dont la limite est en R.

Nous remarquerons que la séparation d'ombre et de lumière est indépendante de l'extrémité du rayon lumineux où se trouve le point éclairant, et que, par conséquent, pour la tracer, il ne sera pas nécessaire de savoir si la projection du point lumineux est réelle ou imaginaire. Dans les deux cas, la même ligne sépare toujours la partie ombrée du corps de la partie éclairée; ces deux parties alternent entre elles selon que la lumière provient de l'une ou l'autre extrémité d'un même rayon lumineux.

La troisième question peut se ramener à trouver le point brillant d'un plan; car il est évident que si, au point brillant de la surface supposé connu, on mène le plan tangent à cette surface, le point

brillant du plan tangent, se confondra avec celui de la surface. Il faudra donc, en général, pour résoudre la troisième question, trouver, pour chaque surface, le plan tangent dont le point brillant coïncide avec le point de tangence. Dans une infinité de cas, on sera obligé, pour y parvenir, d'avoir recours à des méthodes de tâtonnement, méthodes que l'on rend le moins fautives possible par l'emploi des courbes d'erreurs.

La quatrième des questions posées en tête de ce chapitre, se réduit à trouver le cylindre parallèle au rayon lumineux qui détermine la séparation d'ombre et de lumière; la portion obscure de ce cylindre prive de lumière tous les corps qu'elle rencontre.

Trouver, le point brillant d'un plan et celui d'une sphère.

Pour trouver le point brillant d'un plan, quand le point lumineux est donné à une distance finie, on sait qu'il faut abaisser par ce point une perpendiculaire au plan proposé, c'est-à-dire mener par le point lumineux une droite qui ait sa limite au point normal du plan, et porter sur le prolongement de cette perpendiculaire, à partir du point où elle rencontre le plan, une distance égale à celle qui existe entre le point lumineux et le point de rencontre, opération qui s'exécute par les procédés du 3me problème. La droite qui joint l'œil et l'extrémité de la perpendiculaire ainsi prolongée, vient percer le plan au point brillant. La perspective de l'extrémité de cette perpendiculaire donne celle du point brillant cherché, puisque ces deux points se trouvent sur une même droite qui passe par l'œil.

Une construction identique résout ce problème dans le cas où le point lumineux est à l'infini; alors le point de rencontre de la perpendiculaire abaissée du point lumineux sur le plan est aussi à l'infini, c'est-à-dire au point où la perspective de la perpendiculaire rencontre la limite du plan. La partie de cette construction qui sert à prolonger cette ligne d'une grandeur déjà connue, est la même que si la ligne se trouvait à une distance finie.

Pour trouver le point brillant sur une sphère, il faut faire passer par l'œil et le centre de la sphère un plan parallèle au rayon lumineux, rabattre ce plan sur le tableau, et construire le point

brillant du grand cercle rabattu dans ce plan, d'après le rayon lumineux rabattu, et par rapport à l'œil également rabattu; en remettant ce point en perspective par les procédés inverses du rabattement, on aura en perspective le point brillant cherché.

Tracer l'ombre d'un cube sur une de ses faces prolongées.

Soit le cube déjà construit (fig. 31), et que nous rapporterons (fig. 32) en ne conservant que ses arètes visibles et les trois limites des plans qui le forment; et soit le point S′ limite des rayons parallèles par lesquels nous supposerons ce cube éclairé. Nous avons déjà fait remarquer que cette limite correspondait à deux positions du point lumineux, l'une en perspective réelle et l'autre en perspective imaginaire. Supposons, d'abord, que le point S′ soit la perspective imaginaire du point lumineux. Pour trouver, dans cette supposition, l'ombre du cube sur celle de ses faces, qui a IB pour limite et AC pour trace, il suffira d'avoir l'ombre des quatre arètes perpendiculaires à cette face; ce qui s'obtient en menant par chacune d'elles un plan parallèle au rayon lumineux, et cherchant l'intersection de ce plan avec celui sur lequel on veut trouver l'ombre portée.

La limite d'un plan parallèle au rayon lumineux et passant par l'arète SE est S′P; le plan BI et le plan S′P ayant, par construction, leurs limites parallèles, ont pour commune intersection une droite parallèle à ces limites; et le point E appartient à cette intersection. Menant donc, par E, une parallèle à PS′, on aura la ligne indéfinie EG, ombre de ES; mais un point quelconque et son ombre portée se trouvent sur le même rayon lumineux : donc, en faisant passer par S le rayon lumineux SS′, ce rayon déterminera en G l'extrémité de l'ombre portée par l'arète SE. Opérant de même sur les autres arètes, on obtiendra l'ombre totale EGD, etc. On remarquera que GD parallèle à VS, comme ombre portée d'une droite sur un plan parallèle, doit avoir même point de concours I que cette ligne.

Supposons maintenant que S′ soit la perspective réelle du point lumineux; il nous devient alors impossible d'avoir l'ombre portée sur le plan AC, BI; car, dans ce cas, la face vue de ce plan est dans l'ombre : ce plan intercepterait donc tous les rayons lumineux dirigés

vers le cube. Mais nous pouvons chercher l'ombre portée sur le plan NM, IP. Opérant sur l'arète EF comme nous l'avons fait sur ES, nous trouverons pour limite des plans parallèles au rayon lumineux passant par EF, la droite S'B, le point O sera donc la limite de l'intersection de ce plan avec le plan NM, IP; donc OFH sera la direction indéfinie de l'ombre portée par EF; et le point H, où le rayon lumineux passant par E vient rencontrer FH, sera l'extrémité de l'ombre portée par EF. On peut obtenir de même l'ombre portée par les trois autres arètes perpendiculaires à IP, et il en résultera l'ombre NTBFH, etc. On voit qu'une partie de cette ombre est en avant de la trace du plan qui la contient. L'ombre de SE devant avoir même limite que cette arète, on n'a qu'à joindre le point H à cette limite pour avoir la direction de cette ombre. Une remarque semblable, quand on aura sur le prolongement de TN l'ombre du point V, ferait connaître la direction de l'ombre de VS, qui complète l'ombre portée.

Trouver la courbe séparation d'ombre et de lumière sur la surface annulaire décrite, planche 6me, *en supposant le point lumineux à l'infini en perspective réelle au point normal du plan* hg.

On voit que dans cette supposition le point lumineux est tout-à-fait hors du cadre; nous pourrons cependant obtenir la courbe cherchée sans être obligé de recourir à ce point.

Construction. On peut supposer une sphère mobile et variable de rayon, assujettie à être tangente à la surface annulaire et à avoir son centre sur l'axe de révolution, les deux surfaces se toucheront constamment suivant un cercle perpendiculaire à cet axe. Considérons celle de ces sphères qui serait tangente suivant le cercle dont la trace sur le plan méridien parallèle au tableau est NK : cette sphère sera coupée, par ce plan méridien, suivant un grand cercle tangent aux deux courbes méridiennes au point où ces courbes sont rencontrées par KN; donc, si nous joignons un de ces points L au centre E, nous aurons la direction du rayon d'un des grands cercles tangens au point L. Donc, enfin, le point *a*, où la ligne EL prolongée vient rencontrer l'axe, sera le centre du grand cercle, et par conséquent celui de la sphère cherchée.

Si, sur cette sphère entièrement connue, puisque nous avons la perspective de son centre et de son rayon, nous cherchons le grand cercle séparation d'ombre et de lumière, les points où ce cercle coupera celui de contact des deux surfaces appartiendront à la séparation d'ombre et de lumière sur la surface annulaire.

La séparation d'ombre et de lumière, sur la sphère, est donnée par un plan passant par son centre, et perpendiculaire au rayon lumineux; ce plan doit donc avoir *gh* pour limite, et, puisqu'il doit passer par le point *a*, sa trace *cf* contiendra la trace *c* d'une ligne *c*, R passant par *a*; ce plan coupera le plan TS, OR qui contient le cercle de contact des deux surfaces suivant la ligne T, R; et cette ligne sera la corde commune des deux cercles dont nous cherchons l'intersection. On peut donc indifféremment chercher les points où elle rencontre l'un ou l'autre de ces cercles, celui de la sphère, par exemple. Pour cela, rabattons le plan *cf*, *gh* sur le tableau; la ligne T, R vient, dans ce mouvement, s'appliquer en T*l*, parallèlement à la ligne qui joindrait le point R à l'œil rabattu autour de *gh*. Si, par le centre *a* du grand cercle, nous menons une perpendiculaire *e*, *d* à la charnière de rabattement, cette perpendiculaire se rabat en *ei*; la ligne *c*, R, qui passe également par le centre *a*, se rabat suivant une parallèle *ci*, au rabattement de T, R : donc le point *i*, où elle vient rencontrer *ei*, est le centre cherché du grand cercle rabattu. Le rayon de ce cercle étant, en perspective, donné par la ligne L*a*, parallèle au tableau, si, par ses extrémités, nous menons deux parallèles LR et *a*R, l'une dans le plan TS, OR, et l'autre dans le plan *ef*, *gh*, ces lignes intercepteront entre leurs traces *t* et *c* une distance égale à ce rayon; donc, décrivant du point *i* un cercle avec *tc* pour rayon, les deux points *m* et *n* où ce cercle viendra couper la ligne T*l*, seront, en rabattement, les points cherchés. On remet ces points en perspective en abaissant de chacun d'eux des perpendiculaires *mq* et *np* à la charnière de rabattement, perpendiculaires dont on obtient la perspective en joignant leurs traces *p* et *q* à la limite *d* des perpendiculaires à la charnière; les points P et S, où ces perpendiculaires viennent rencontrer la ligne T, R, seront, en perspective, les deux points cherchés; ils appartiennent à la branche intérieure de la courbe de séparation d'ombre et de lumière, comme provenant du plus petit des

deux cercles déterminés sur la surface par l'intersection du plan TS, OR.

Il est une seconde sphère tangente à la surface, et dont le centre est pareillement en a; son rayon en perspective serait la même ligne aL prolongée jusqu'au point où elle rencontre de nouveau le cercle méridien. Cette sphère, ayant même centre, aurait même plan ef, gh de séparation d'ombre et de lumière. Dans le rabattement de ce plan, son centre viendrait pareillement en i, et son rayon serait celui du cercle xmn augmenté du diamètre du cercle générateur de la surface, c'est-à-dire de deux fois la grandeur I. Il suffirait donc, pour avoir deux nouveaux points de la courbe, de trouver le rabattement de la ligne d'intersection du plan ef, gh avec le nouveau plan de contact de cette sphère et de la surface; les deux points ainsi obtenus appartiendront à la courbe extérieure.

La séparation d'ombre et de lumière étant tracée par points sur la perspective de la surface, et chacun de ses points se trouvant sur une droite ou un plan connus, on pourra trouver, également par points, l'ombre portée de la surface, en déterminant le cylindre parallèle aux rayons lumineux qui passe par la séparation d'ombre et de lumière, et cherchant l'intersection de ce cylindre avec la surface sur laquelle on veut obtenir l'ombre portée.

Dans certaines positions du point lumineux, la surface annulaire porte ombre sur elle-même : la figure sur laquelle nous venons d'opérer en fournit la preuve immédiate; car si l'œil était lui-même le point éclairant, le contour apparent se confondrait avec la séparation d'ombre et de lumière; et, dans cette supposition, la partie non vue de la surface projetée dans les deux triangles curvilignes qui ont chacun pour sommet deux des points singuliers du contour apparent intérieur, et pour troisième sommet le point où la branche postérieure de cette courbe rencontre, en perspective, la branche antérieure, serait évidemment privée de lumière par ombre portée.

Les mêmes principes serviront à trouver l'ombre portée par la surface sur elle-même, et sur une surface quelconque. Par un des points de la séparation d'ombre et de lumière, on mènera un rayon lumineux; par ce rayon, on fera passer un plan quelconque; on cherchera la courbe intersection de ce plan avec la surface sur laquelle on

veut obtenir l'ombre portée, et le point où le rayon lumineux viendra rencontrer cette courbe, sera un point du contour de l'ombre portée : si le rayon ne la rencontrait pas, le point d'où il provient ne porterait pas ombre.

Trouver les ombres de la vis.

Supposons que la vis mise en perspective, planche 7me, soit éclairée par un point lumineux à l'infini, dont la projection imaginaire serait en S, et cherchons l'ombre portée de cette vis sur le plan AB, EF, et son ombre sur elle-même.

Pour trouver sur ce plan l'ombre de l'hélice saillante qui est une arête séparation d'ombre et de lumière, nous ferons passer, par chaque génératrice du cylindre sur lequel cette hélice est censée tracée, des plans parallèles au rayon lumineux; les intersections de ces plans avec le plan AB, EF auront toutes le point E pour limite, et passeront par le pied de chaque génératrice. Il ne restera plus, pour avoir l'ombre d'un point quelconque situé sur ces génératrices, qu'à joindre ce point à la limite des rayons lumineux, et la rencontre de ce rayon avec l'intersection commune du plan provenant de l'arête auquel il appartient et du plan AB, EF, sera l'ombre cherchée. Ainsi, l'ombre du point N devant se trouver en même temps sur le rayon lumineux NS, et sur l'intersection L''E du plan AB, EF et d'un plan parallèle au rayon lumineux passant par la génératrice L'N, se trouve en P', intersection commune de ces deux droites; toute l'ombre de l'hélice se détermine par la même construction.

Cherchons l'ombre portée par les arêtes inférieures de la tête sur la surface l'arête W, F, par exemple. En faisant passer par cette ligne un plan WK, SF parallèle au rayon lumineux, l'intersection de ce plan et de la surface donne l'ombre cherchée. On obtient cette intersection par la rencontre successive du plan et de chaque génératrice. Ainsi, la génératrice contenue dans le plan méridien KB', ES est rencontrée au point P par l'intersection commune KP du plan méridien et du plan WK, SF. En opérant de même pour l'arête 12.14, on obtient les deux courbes dont l'intersection 11 est l'ombre portée par le point 12.

Il nous reste enfin à trouver l'ombre portée par l'hélice saillante

sur la surface. Cette ombre est l'intersection d'un cylindre passant par l'hélice parallèlement au rayon lumineux, avec la surface éclairée de la vis; or, la base de ce cylindre, sur le plan AB, EF, est l'ombre portée sur ce plan par l'hélice. En faisant donc passer par une des génératrices TV de la surface éclairée un plan parallèle au rayon lumineux, ce plan QR, SM' coupe le plan horizontal suivant la ligne R'U, et, par conséquent, rencontre la base du cylindre au point U. L'intersection de la génératrice du cylindre qui passe par U avec la génératrice de la vis sur laquelle on a opéré, donne un point V de l'ombre cherchée : tous les autres points sur chacune des révolutions par la surface se déterminent par le même procédé. L'ombre portée par la tête sur le plan AB, EF s'obtient en prolongeant ses arêtes, 13, par exemple, jusqu'au point 2, où elle rencontre ce plan; joignant ce point à la limite E, et menant par 13 un rayon lumineux qui coupe le plan en 3, ombre portée par 13; de même 4 sera l'ombre portée par 14, la face 13.14 se trouvant parallèle au rayon lumineux par construction.

Il y a souvent lieu à tracer sur la surface apparente de la vis sa courbe de séparation d'ombre et de lumière; ce problème se résout en Perspective comme en Géométrie orthogonale. Il ne s'agit, en effet, que de faire passer par chaque génératrice un plan parallèle au rayon lumineux; de chercher ensuite la courbe plane seconde intersection de ce plan avec la surface, et le point d'intersection de la courbe et de la génératrice donne un point de la séparation d'ombre et de lumière, puisqu'il donne le point de tangence d'un plan parallèle au rayon lumineux. On pourrait aussi obtenir ce point en considérant le paraboloïde hyperbolique tangent à la surface rampante suivant la génératrice par laquelle passe le plan parallèle au rayon lumineux. Ayant ainsi obtenu la courbe séparation d'ombre et de lumière sur chacune des surfaces, on procéderait, pour avoir l'ombre portée qui en résulte, comme nous l'avons fait pour l'hélice saillante de la vis.

En discutant les divers cas que peut présenter le plan tangent à la surface rampante de la vis, on reconnaît que la séparation d'ombre et de lumière peut avoir deux asymptotes, une asymptote, ou enfin peut être une courbe fermée, selon que la perspective du point lumineux est hors de la courbe limite de la surface, sur cette courbe

ou dans son intérieur. C'est le second cas que présente notre épure.

Nous terminerons cet exposé du tracé des ombres en perspective, en indiquant les constructions qui ont servi à trouver, planche 7me, fig. 33, la séparation d'ombre et de lumière sur la sphère, son ombre portée sur le plan où elle est placée, et son ombre portée sur la vis.

Nous avons obtenu la courbe séparation d'ombre et de lumière en menant par le centre *c* un plan *pr*, *Es* perpendiculaire au rayon lumineux; l'intersection *pq* de ce plan et de celui du contour apparent nous a donné les points où la courbe cherchée était tangente à ce contour; nous avons pu dès lors la tracer par les procédés qui servent à construire les courbes diamétrales des surfaces non réglées. Pour obtenir l'ombre portée, nous avons mené dans l'espace une suite de parallèles à *pq*; par une d'elles, *ux*, tangente au point *x* à la séparation d'ombre et de lumière, nous avons fait passer un plan parallèle au rayon lumineux; la trace de ce plan sur le plan AB, EF est *vy*. Joignant le point *x* à la limite des rayons lumineux, *y* a été l'ombre portée de *x*, et la ligne *vy* une tangente en ce point à la courbe cherchée; le point *u* a été obtenu de même, etc. Enfin, en faisant passer un plan parallèle au rayon lumineux par la génératrice de la surface de la vis parallèle au tableau, et qui correspond au point où commence l'hélice saillante, ce plan, dont la trace est *a'b'*, et dont la limite passe par S, coupe le plan de séparation d'ombre et de lumière suivant une droite *ce'*; cette droite perce en *e'* le cylindre obscur projeté par la sphère; la ligne *e'i* est donc une des génératrices de ce cylindre, et le point *i*, où elle vient rencontrer la génératrice de la surface sur laquelle nous avons opéré, est un des points du contour de l'ombre portée par la sphère sur la vis.

CHAPITRE V.

Considérations de projection polaire, à l'usage des dessinateurs et des peintres.

La Peinture ayant pour but de représenter, sur une surface plane, les corps à trois dimensions, de manière qu'un spectateur placé en avant de cette surface éprouve, en la regardant, une impression visuelle qu'il puisse confondre avec celle que produirait sur son œil les objets mêmes dont cette surface est destinée à reproduire l'image. Le matériel de cet art, en ce qui concerne le tracé des lignes, rentre dans le domaine de la projection polaire; chaque tableau est une épure de perspective dans laquelle, outre les arêtes visibles et les contours apparens des corps décrits, l'artiste a appliqué sur chaque point de l'image une couleur qui puisse faire, sur la rétine, l'impression que produirait chaque point correspondant de l'objet qu'il veut représenter, si cet objet existait réellement derrière la toile.

Comme l'œil ne juge de la réalité des objets que par les impressions lumineuses qu'il en reçoit, on conçoit la possibilité d'exécuter un tableau imitant assez la nature pour produire une illusion complète; mais la coloration de l'image, quelque parfaite qu'elle soit, ne pourra atteindre ce but, si le tracé des lignes, indépendamment de toute couleur, n'a pas été arrêté avec la plus grande exactitude; et ce n'est que par l'emploi raisonné des principes de la projection polaire, que l'on peut arriver à ce résultat, l'imitation n'offrant que des ressources le plus souvent imparfaites, et auxquelles il ne faut recourir que lorsqu'on ne peut faire usage de la méthode rigoureuse.

C'est une erreur de croire que les principes de Perspective, évidemment indispensables pour représenter avec exactitude les objets de forme régulière, deviennent tout-à-fait inutiles quand il s'agit d'objets que le peintre peut créer à volonté, tels que les arbres, les rochers, les nuages, etc.; peu de mots vont nous suffire pour le prouver.

Il est un certain nombre de phénomènes physiques auxquels sont soumis tous les corps de la nature : ils gravitent vers le centre de la terre; ils sont frappés par la lumière qu'ils renvoient sous un angle d'incidence égal à celui de réflexion. Cette lumière, sans laquelle les phénomènes de la vision n'existeraient pas, divise les corps en parties éclairées et parties ombrées, se meut en ligne droite, et peut émaner, soit d'un corps situé à l'infini (un astre), soit d'un corps à distance finie; enfin, elle peut être renvoyée par réflexion des corps éclairés et non lumineux.

Quels que soient donc les objets que le peintre aura l'intention de représenter, s'il ne veut pas s'exposer à méconnaître quelques-unes des lois physiques que nous venons de rappeler, il faudra qu'il fixe sur sa toile le sens de la pesanteur, la direction de la lumière et son point de départ; enfin, il faudra qu'il fixe également le point d'où son tableau devra être vu; car nous savons que l'œil changeant de place, la forme et la position respective des objets représentés changeraient pour le spectateur.

La position du spectateur sera donnée par le point de vue; le sens de la pesanteur par la limite des plans horizontaux; la distance du spectateur au tableau par les deux points où le cercle de rabattement de l'œil est coupé par la limite des plans horizontaux, que les peintres nomment points de distance; la direction des rayons lumineux provenant d'un astre, par la limite du faisceau lumineux; enfin, la direction de la lumière provenant d'un corps à distance finie, par la place qu'occupe ce corps sur une droite ou sur un plan connus de position.

Telles sont les indications polaires qu'il faut nécessairement placer sur toute surface où l'on veut exécuter un tableau; et l'on sent que plus ce tableau contiendra de corps soumis à une génération mathématique, plus son exécution exigera l'emploi des méthodes de tracé fournies par la projection polaire.

Voyons quelles sont les obligations que le peu de lignes et de points que nous venons de placer imposent à l'artiste qui va composer sur la surface ainsi préparée.

Un corps ne peut être en équilibre si la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur la limite des plans horizontaux n'est pas

comprise dans l'intérieur du polygone que déterminent ses points d'appui.

Les liquides en repos ont leur surface perpendiculaire au sens de la pesanteur.

Le ciel ne peut être représenté dans la partie du tableau inférieure à la limite des plans horizontaux.

Le contour apparent de la terre doit toujours se trouver supérieur à cette limite.

Ce n'est que dans le cas où la surface des eaux se prolonge indéfiniment, que cette limite forme, elle-même, la séparation du ciel et de la terre, l'horizon.

Toute droite horizontale parallèle au tableau est parallèle à l'horizon (1).

Une horizontale quelconque a sa limite à l'horizon.

Tous les objets qui sont plus élevés que l'œil du spectateur doivent dépasser l'horizon d'une quantité égale à l'excès de leur hauteur; tous les objets plus bas que l'œil du spectateur doivent rester en dessous de l'horizon d'une grandeur égale à la différence de hauteur; enfin, tous les objets qui sont au même niveau que l'œil du spectateur doivent se trouver sur l'horizon, quelle que soit d'ailleurs leur distance du tableau.

La position du corps lumineux entraîne d'autres règles non moins importantes. Dans le cas des rayons parallèles, le même point limite pouvant appartenir aux deux extrémités d'une même droite, peut, comme nous l'avons déjà fait remarquer, indiquer la position réelle ou imaginaire du soleil, c'est-à-dire le cas où le soleil est derrière le tableau, et celui où il est derrière le spectateur. Dans le premier cas, comme le soleil ne nous éclaire que lorsqu'il est dans la partie du ciel visible pour nous, et que nous avons fait voir que le ciel ne pouvait être représenté au-dessous de la limite des plans horizontaux, le point de concours des rayons lumineux ne peut non plus être placé au-dessous de cette ligne, et, par un raisonnement sem-

(1) Nous parlons ici de droites, parce que nous avons déjà indiqué qu'un des moyens de projeter des corps de forme irrégulière, était de supposer qu'ils enveloppent un squelette de lignes connues.

blable, quand le soleil est supposé en avant du tableau, le point de concours ne peut être placé qu'en dessous de cette même ligne. Dans ces deux suppositions, puisque la lumière se meut en ligne droite, et que ses rayons sont parallèles, il faut que toute ligne qui joint un point qui porte ombre à son ombre portée, aille concourir au point limite des rayons lumineux. Cette dernière observation s'applique aussi à la lumière provenant d'un corps à distance finie, en remarquant que ce corps est lui-même le point où viennent se croiser tous les rayons lumineux qui émanent de lui.

Telles sont les règles principales qu'on ne doit jamais perdre de vue dans la composition linéaire d'un tableau, parce que, s'appliquant à tous les corps, quel que soit l'objet qu'on se propose de représenter, il est difficile qu'il n'y ait pas lieu de faire usage de la plupart d'entre elles. Nous allons, en supposant que nous avons un dessin à construire, développer quelques autres règles moins générales, mais qui ne sont pas moins importantes à connaître.

Comme, à moins de circonstances particulières, le spectateur se placera toujours en face du tableau, et vis-à-vis son milieu, le point de vue devra se trouver à distance égale des deux bords verticaux du cadre, et l'on fera varier sa hauteur, selon la place que le tableau doit définitivement occuper, de manière à ce qu'il corresponde à la hauteur de l'œil d'un homme ordinaire, sans cependant trop s'éloigner du centre du cadre. Le point de vue arrêté (1), on mènera par ce point la limite des plans horizontaux, et l'on placera sur cette ligne les deux points de distance qui, le plus souvent, seront hors du cadre, mais dont on pourra toujours indiquer la position en marquant sur l'horizon une partie aliquote de leur distance au point de vue, comme la moitié, le tiers, etc.

Supposons que nous voulions représenter un coucher du soleil : la perspective du disque de cet astre, que nous rapprocherons d'autant

(1) Quelquefois, en composant un paysage d'imagination, le dessinateur y reproduit les sites et les fabriques dont il a garni son portefeuille ; s'il ne tient pas compte de la position du point de vue sous lequel ces objets ont été dessinés d'après nature, il est exposé à composer un ensemble défectueux, en réunissant dans un même cadre des tracés perspectifs qui n'ont souvent ni même point de vue ni même horizon.

plus de l'horizon que nous voudrons peindre une heure plus avancée, sera évidemment la limite des rayons lumineux en projection réelle. Supposons, en même temps, qu'une partie du paysage représente une nappe d'eau; la surface de l'eau est un plan dont la limite est l'horizon, et dont il faut se donner la trace sur le tableau pour que ce plan soit déterminé. La distance entre sa trace et sa limite donnera, à l'échelle du tableau, la hauteur de l'œil du spectateur au-dessus de la nappe d'eau. Pour trouver la perspective du point où l'eau réfléchit l'image du soleil (le point brillant de sa surface), il faut, par le centre de la projection de l'astre, abaisser une perpendiculaire au plan horizontal, et porter en dessous du point où cette ligne rencontre l'horizon, la même distance qui existe sur le tableau entre l'astre et l'horizon.

S'il y a, dans le même tableau, un point lumineux à distance finie donné par l'extrémité supérieure d'une verticale, perçant le plan de l'eau à un point connu, il est évident que l'image réfléchie de ce point se trouvera en perspective sur le prolongement inférieur de cette verticale, à une distance égale à celle du point lumineux à l'eau.

Un objet quelconque pouvant être considéré comme un corps lumineux à distance finie, puisqu'il n'est visible que par la lumière qu'il renvoie à l'œil, la perspective de son image dans l'eau pourra s'obtenir par points, en employant la construction indiquée au paragraphe précédent : pour obtenir le contour apparent de cette image, il faudra considérer la projection de l'image réfléchie comme la perspective d'un corps égal à l'objet, et symétriquement placé par rapport à la surface réfléchissante.

Quand la surface réfléchissante est un plan perpendiculaire au tableau, l'image et l'objet, sur le tableau, se trouvent toujours sur une même perpendiculaire à la limite de la surface, chacun à une distance égale du point où cette perpendiculaire rencontre la surface, soit qu'il s'agisse d'un objet à distance finie ou à distance infinie.

Lorsque le plan réfléchissant est quelconque, l'image se trouve en perspective sur une ligne partant de l'objet et allant concourir au point normal du plan réfléchissant. Pour porter sur cette perpendiculaire une grandeur égale à la distance qui existe entre l'objet et la surface, il faut nécessairement recourir aux constructions du 3me problème.

L'image des objets réfléchis dans l'eau ne peut conserver sa régularité que lorsque la surface réfléchissante est tranquille : au moindre mouvement du liquide, cette image se déforme, et s'allonge vers le spectateur en bandes colorées sensiblement parallèles à l'horizon. Cette déformation de l'image dépend de celle qu'a éprouvée la surface. Les ondes ont une forme presque toujours régulière, mais qui varie selon l'intensité et la direction de la force qui les a produites; une partie plus ou moins grande de l'image totale est renvoyée par chacune d'elles à l'œil du spectateur, et il en est plusieurs qui lui renvoient en même temps, à cause de leur courbure, une partie de l'image du ciel, ce qui produit des intervalles clairs entre des bandes colorées; intervalles qui sont d'autant plus grands que les parties réfléchies appartiennent aux extrémités de l'image les plus rapprochées du spectateur. Quelque déformation que la partie colorée subisse, la réunion des images partielles, qui forment alors l'image totale, est sujette à des lois qui dérivent de celles que nous avons données pour la réflexion exacte, et qui s'en rapprochent d'autant plus que la déformation de la surface réfléchissante est moindre. Malgré les altérations, l'image et l'objet en perspective se trouvent toujours sensiblement sur une même verticale, de telle sorte pourtant que ce sont les objets les plus élevés au-dessus de l'eau qui, réfléchis, peuvent subir le plus de déviation à droite ou à gauche de cette verticale, comme aussi dans le sens de sa direction. Le soleil, par exemple, quand il est très élevé sur l'horizon, produit sur l'eau légèrement agitée une large bande lumineuse qui s'étend en perspective à droite et à gauche de la verticale passant par cet astre : à mesure que le soleil descend, cette bande se rétrécit, ses bords se régularisent, et, lorsqu'il est prêt à se coucher, la tranche brillante n'a plus que la largeur du diamètre apparent de l'astre, c'est-à-dire que chaque point, malgré le mouvement des eaux, n'est plus réfléchi à l'œil que dans la trace du plan normal passant par l'œil parallèlement au rayon lumineux, et que la déviation latérale est nulle.

Généralement la surface des eaux tranquilles réfléchit plutôt le ciel que les objets terrestres; aussi ne faut-il pas oublier d'y reproduire les nuages qui, vu leur éloignement, peuvent être censés à l'infini.

Puisque le ciel et les objets terrestres se réfléchissent ensemble dans

l'eau, une chose très importante sera d'y tracer avec exactitude leur ligne de séparation. Il est bien peu de cas où la méthode rigoureuse puisse servir à cette détermination; mais elle fournira des limites qui permettront au peintre de ne pas trop s'éloigner de la vérité. On peut supposer le terrain susceptible d'être réfléchi, coupé par des tranches verticales perpendiculaires au tableau, tracer ces tranches en réflexion, et joindre par une courbe les points maximums de ces sections réfléchies, c'est-à-dire ceux où leurs images, après s'être avancées vers la trace du plan réfléchissant, rétrogradent vers sa limite.

Si nous voulons placer dans le tableau dont nous sommes censés nous occuper, un édifice dont le plan de base soit élevé de cinq mètres au-dessus de la surface de l'eau, le plan de cette base viendra évidemment couper le tableau suivant une ligne distante de cinq mètres (1), à l'échelle du tableau, de la trace de l'eau. Le plan sur lequel doit reposer l'édifice sera donc entièrement connu : les mêmes procédés qui nous ont servi à établir le cube quelconque dans l'espace, nous serviront à tracer ses lignes principales; et comme nous avons le moyen de diviser une ligne quelconque de cet édifice en parties données, nous pourrons à volonté en arrêter tous les détails.

L'édifice dessiné, nous appliquerons à chacune de ses faces le procédé connu pour discerner celles qui sont obscures de celles qui sont éclairées: nous obtiendrons par là ses arètes séparation d'ombre et de lumière, et par suite son ombre portée sur lui-même et sur le plan de sa base. D'après cette dernière ombre, selon que le terrain environnant sera supposé plus ou moins conforme au plan de la base, on pourra, en allongeant les parties du contour ombré qui correspondent à une dépression, et raccourcissant celles qui aboutissent à un exhaussement, obtenir sans trop d'erreur l'ombre portée sur le terrain environnant.

Supposons encore que, dans le même tableau, on veuille tracer un sentier. Les bords d'un sentier forment ordinairement deux lignes courbes parallèles; il faudra donc que parmi les tangentes à ces deux

(1) Le tableau sert toujours d'échelle au dessin, soit qu'on y suppose les objets dans leur véritable grandeur ou représentés par des grandeurs proportionnelles.

courbes, celles qui correspondent aux points de rencontre d'une même normale à la direction du sentier satisfassent aux conditions de parallélisme; elles doivent, par conséquent, avoir leur point de concours commun sur la limite du plan tangent à la surface du terrain au point d'où elles proviennent, et il faudra de plus que la vraie distance comprise entre chaque couple de tangentes soit à très peu de chose près la même. Ce sont ces conditions à remplir qui rendent les longs développemens de routes si difficiles à représenter avec exactitude : cette difficulté augmente nécessairement quand on essaie d'y tracer les ornières, qui ont entre elles un parallélisme rigoureux.

Quand, au lieu d'un sentier, c'est un cours d'eau que l'on veut représenter, les considérations précédentes sont d'autant plus applicables au tracé de ses bords, que ce cours d'eau, par sa nature, offre plus de régularité; dans ce cas, les tangentes en regard étant toutes horizontales, doivent avoir la succession de leurs points de concours sur la limite des plans horizontaux.

Il est sans doute une infinité d'autres observations semblables à faire : chaque cas particulier que nous choisirions donnerait lieu à des remarques nouvelles. Nous pourrions également essayer de faire connaître comment de la projection polaire sur un plan on peut passer à la projection polaire sur une surface courbe donnée; seconde espèce de perspective qui comprend les panoramas de tout genre, et dont le tracé se réduit à chercher l'intersection du cône projetant déterminé par la projection plane, avec la surface courbe sur laquelle on veut obtenir une nouvelle projection. Mais nous ne prolongerons pas davantage ce chapitre; nous devons borner ici des recherches qui, par leur spécialité, s'écarteraient tout-à-fait du but essentiellement élémentaire que nous nous sommes proposé dans cet ouvrage.

FIN.

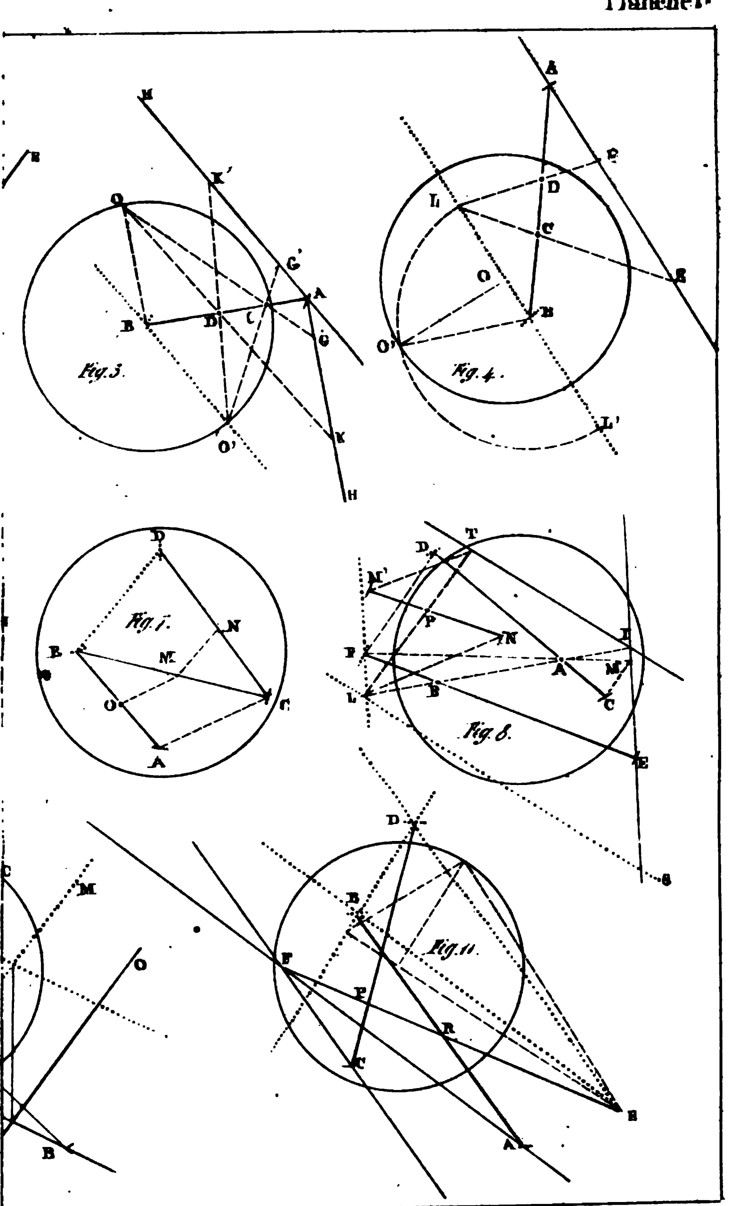
CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

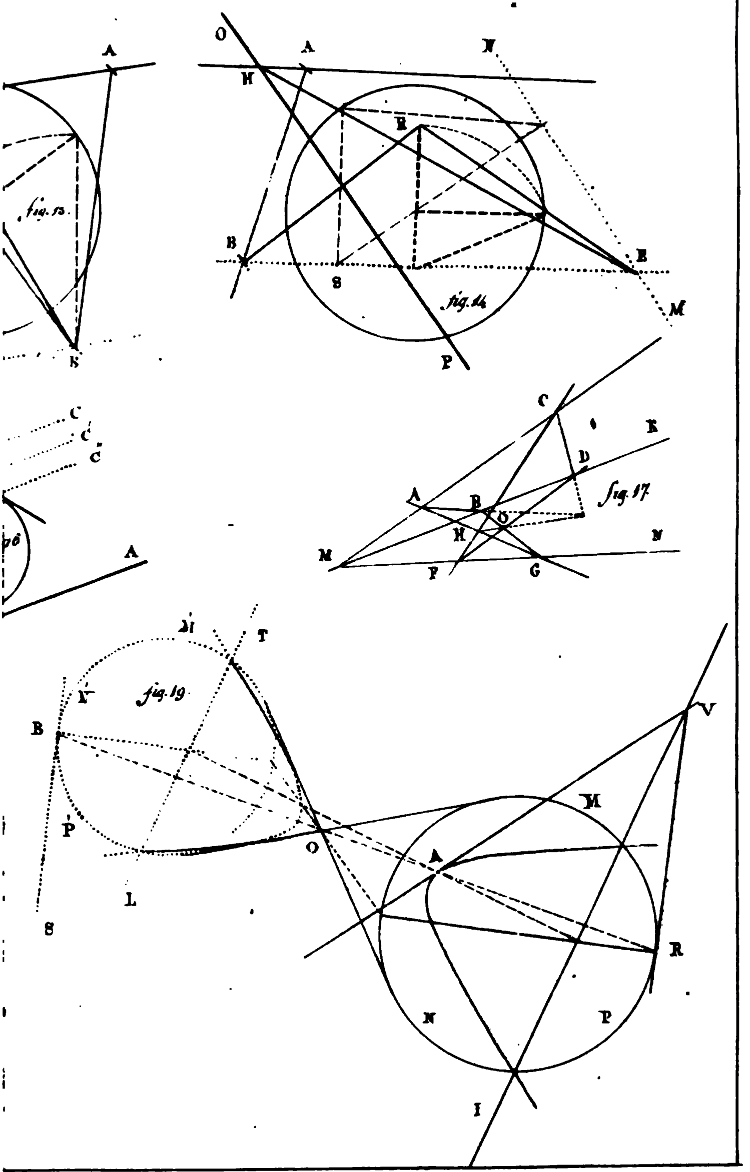
FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Planche 1re

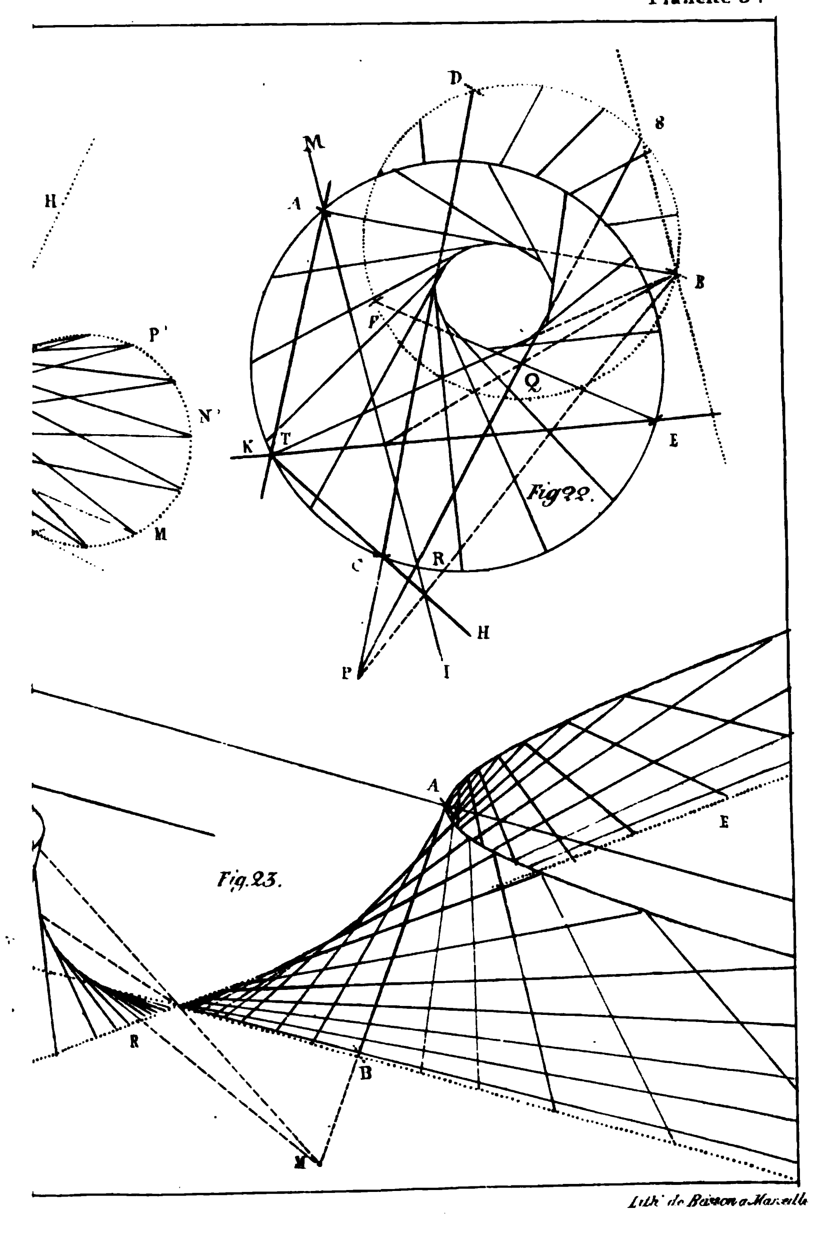


Lith. de Boisson a Marseille.

Planche 2e.

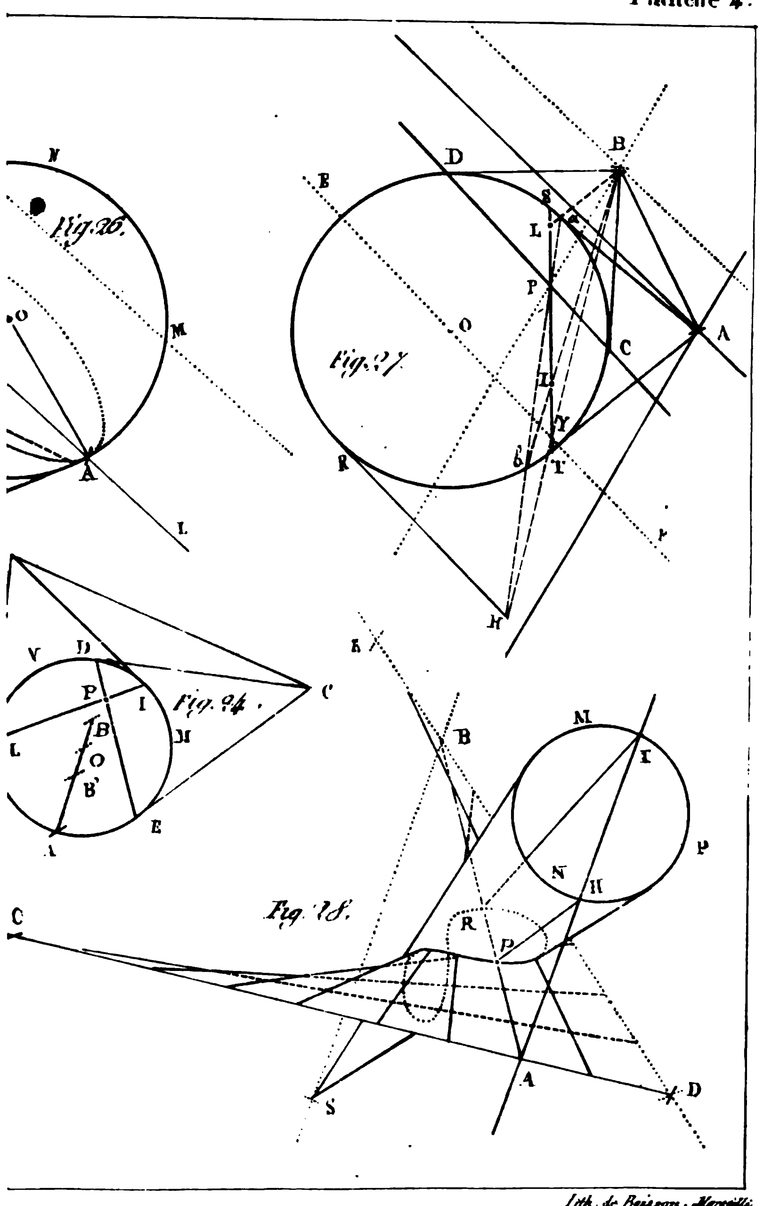


Lith. de Broux à Marseille.

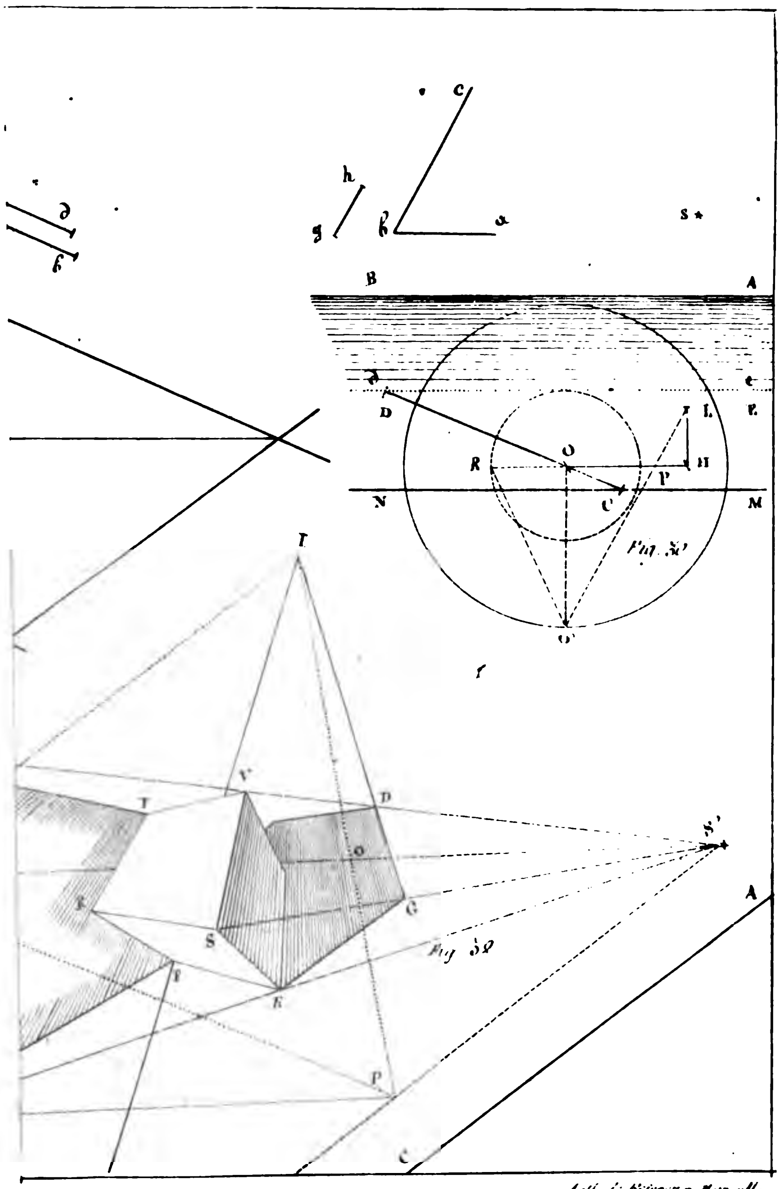


Lith. de Boisson a Marseille

Planche 4.



Lith. de Boisson, Marseille



Lith. de Béisson à Marseille

Planche 6me

V

IV

III

II

I

Lith. de Boisson à Marseille.



Planche 7.me

